MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $B=A-a\cdot I_3$.

b) Verificați $B^2=B+2I_3$ și $A^2=(2a+1)\cdot A-(a^2+a-2)\cdot I_3$.

c) Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ și determinați A^{-1}.

Problema 2.

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ și determinantul $D(a,b,c)=\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy), considerăm punctele $A_n(n;n^2)$, $n\in\mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că $D(a,b,c)=(b-a)(c-a)(c-b)$.

b) Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m,n,k, punctele $A_m(m;m^2)$, $A_n(n;n^2)$, $A_k(k;k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_mA_nA_k$ este număr natural.

c) Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018}A_nA_{n+2018}$ nu depinde de $n\in\mathbb{Z}$.

d) Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_mA_nA_k$, cu $m,n,k\in\mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

Problema 3.

Două funcții f,g le numim *a-înrudite*, $a\in\mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]$.

a) Demonstrați că funcțiile $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x-2}{x^2-1}$ și $g(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ sunt *2-înrudite.*

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ încât $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+5}}{x^2-x}$ și $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie *a-înrudite.*

c) Dacă alegem trei funcții f,g,h încât f și g sunt *a-înrudite* iar g și h sunt *b-înrudite*, demonstrați că atunci f și h sunt *ab-înrudite.*

Problema 4.

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ încât funcția $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+cx$ are domeniul maxim $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$.

a) Demonstrați că $a=2$, $b\in[1;+\infty)$ și $c=-1$.

b) Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.

a) Arătați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*