

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"****ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului****CLASA a XII-a****Problema 1.**Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ cu legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 2x + y - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- Demonstrați $(\mathbb{R}; \circ)$ este structură neasociativă.
- Stabiliți dacă $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.
- Rezolvați în $(\mathbb{R}; \circ)$ sistemul
$$\begin{cases} (x-1) \circ y = 9 \\ (x+1) \circ (y-1) = 13 \end{cases}$$

Problema 2.Fie matricele $X(a) = a \cdot A + I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G = \{X(a) / a > -1\}$.

- Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ se verifică $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$.
- Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.
- Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2018)$.

Problema 3.Considerăm funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- Calculați $\int f(x) dx$.
- Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2) < F(3)$.
- Demonstrați că funcția $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, cea primitivă G care verifică $G(1) = 0$.

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t) = \frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t \geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.