MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX–a

Problema 1.
Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+1)x^2-2(m+2)\cdot x+m+2, m\neq 1$.
Să se determine parametrul real m astfel încât:
a) ${x_1}^2+{x_2}^2=x_1\cdot x_2$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $f(x)=0$.
b) Graficul funcției să nu intersecteze axa (Ox).
c) $f=f(x)$să aibă valoarea minima negativă.

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases} x_1+x_2=2\cdot\frac{m+2}{m+1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{m+2}{m+1}\end{cases}$ relațiile lui Viète........ 2p
${x_1}^2+{x_2}^2=x_1\cdot x_2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2=3x_1\cdot x_2$........ 1p
Rezultă $4\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2=3\cdot\frac{m+2}{m+1}\Rightarrow\frac{m+2}{m+1}\cdot\left(4\cdot\frac{m+2}{m+1}-3\right)=0\Rightarrow m\in\{-5,-3\}$........ 1p
b) Este suficient ca $\Delta=4(m+2)^2-4(m+1)(m+2)<0$........ 1p
Rezultă $m<-2 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-2)$........ 1p
c) $f=f(x)$ are valoarea minimă negativă dacă
$\begin{cases} m+1>0 \\ -\frac{\Delta}{4(m+1)}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m+1>0 \\ \frac{m+2}{m+1}>0\end{cases}\Rightarrow m\in(-1,\infty)$........ 1p

Problema 2.
Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat având latura de lungime$l>0$.
Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$, în funcție de l.

SOLUȚIE:
Deoarece $ABCDEF$ un hexagon regulat rezultă că $AEDB$, $AFDC$ sunt dreptunghiuri........ 2p
Astfel, în $AEDB$: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$, iar în AFDC: $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$........ 2p
Din cele două relații se obține:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$........ 2p
Așadar, mărimea cerută$3\left|\overrightarrow{AD}\right|=3\cdot 2l=6l$........ 1p

Problema 3.

Pe laturile AB, BC, DAși DCale patrulaterului convex $ABCD$, se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât:$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$.

Să se demonstreze că dacă $3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = 2 \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

SOLUȚIE:

Din ipoteză avem: $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.. 2p

Obținem $3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = \overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}[1]$.. 2p

Dar,$3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ [2]. Din [1] și [2] obținem:

$\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, echivalentă cu $\overrightarrow{AD} + +\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, adică $ABCD$ este paralelogram.. 3p

Problema 4.

Două corpuri aflate la o distanță de 153 de metri se deplasează unul către celălalt. Primul corp parcurge 10m/s, iar al doilea parcurge în prima secundă 3m și în fiecare secundă următoare cu 5m mai mult decât în secunda precedentă. După câte secunde se întâlnesc cele două corpuri?

SOLUȚIE:

Notăm cu A și B cele două corpuri, cuAB distanța inițială dintre ele, v_A ,viteza corpului A și cu v_B, viteza corpului B 1p

Avem$v_A = 10m/s$, iar corpul Bparcurge: 3 metri în prima secundă, $(3 + 5)$ metri în a doua secundă, $(3 + 5 + 5)$ metri în a treia secundă,... și $[3 + 5(n - 1)]$ metri în a n-a secundă 1p

Notăm cu n numărul de secunde după care se întâlnesc cele două corpuri.

Cum $AB = 153$ metri $\Rightarrow 10n + 3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 5) + \cdots + [3 + 5(n - 1)] = 153$ 1p

Obținem $10n + \sum_{k=1}^{n}[3 + 5(k-1)] = 153$ 1p

Rezultă $10n + 3n + 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - 5n = 8n + 5\sum_{k=1}^{n} k$ 1p

$8n + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 153 \Rightarrow 5n^2 + 21n - 306 = 0$ 1p

$n_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{6561}}{10} = \frac{-21+81}{10} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -10,2 \text{ (nu convine)} \\ n_2 = 6 \text{ (soluţie)} \end{cases}$ 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*