MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X–a

Problema 1.

a) Să se rezolve, în ℝ, ecuația: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

b) Să se rezolve, înℝ, inecuația:$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{5x+2}} \leq \frac{25}{4}$.

SOLUȚIE:

a) Condiție de existență: $x \geq -1$ 0.5p

Ecuația devine $\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2$ 1p

Rezultă: $\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2$ 1p

$\left|\sqrt{x+1}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{x+1}-1, & x \geq 0\\ 1-\sqrt{x+1}, & x \in [-1,0)\end{cases}$ 0.5p

Dacă $x \geq 0$, ecuația devine $\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1=2 \Rightarrow x=0$ 1p

Dacă $x \in [-1,0)$, ecuația devine $\sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2$(identitate) $\Rightarrow x \in [-1,0)$

Așadar, $x \in [-1,0]$ 1p

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{5x+2}} \leq \frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{6-5x}{5x+2} \geq -2$, cu $x \neq -\frac{2}{5}$ 1p

$\frac{6-5x}{5x+2} \geq -2 \Rightarrow \frac{x+2}{5x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-2] \cup \left(-\frac{2}{5},\infty\right)$ 1p

Problema 2.

a) Calculați: $A=\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_{a^2} x}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^n} x}$, unde $a,x \in (0,\infty)\setminus\{1\}, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Notăm $t=\log_2 3$. Dacă $u=\log_{12} 18$ și $v=\log_{24} 54$, să se demonstreze că $u \cdot v+5(u-v)=1$.

SOLUȚIE:

a) $A=\log_x a+\log_x a^2+\ldots+\log_x a^n=(1+2+3\ldots+n)\log_x a=\frac{n(n+1)}{2}\log_x a$ 3p

b) $u=\frac{\log_2(2\cdot 3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\frac{1+2t}{2+t}$ 1p

$v=\frac{\log_2(2\cdot 3^3)}{\log_2(2^3\cdot 3)}=\frac{1+3t}{3+t}$ 1p

$u\cdot v+5(u-v)=\dfrac{(1+2t)(1+3t)}{(2+t)(3+t)}+5\cdot\left(\dfrac{1+2t}{2+t}-\dfrac{1+3t}{3+t}\right)=\dfrac{t^2+5t+6}{t^2+5t+6}=1$ 2p

Problema 3.

Fie $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}, b\in(0,\infty)$ și $c\in[0,\infty)$ astfel încât $\log_a(bx+c)=b\log_a x+c, (\forall)\ x\in(0,\infty)$.

a) Să se demonstreze că $\log_a(ab+c)=b+c$.

b) Să se demonstreze că $\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=c-b$.

c) Să se determine numerele a, b, c care satisfac egalitatea din enunț, $(\forall)x\in(0,\infty)$.

SOLUȚIE:

a) În egalitatea data punem $x=a\Rightarrow\log_a(ab+c)=b+c$. 1p

b) În egalitatea data punem $x=\dfrac{1}{a}\Rightarrow\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=c-b$. 1p

c) Pentru $x=1\Rightarrow\log_a(b+c)=c$. Adunăm relațiile de la a) și b) și obținem:

$\log_a(ab+c)+\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=2c=2\log_a(b+c)$. 1p

Rezultă $(ab+c)\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=(b+c)^2$ 1p

Obținem $abc+\dfrac{bc}{a}=2bc\,|:b\neq0\Rightarrow c\cdot(a-1)^2=0$ 1p

Cum $a\neq1\Rightarrow c=0$. Din $\log_a b=0\Rightarrow b=1$ 1p

Așadar, $\begin{cases}a\in(0,\infty)\setminus\{1\}, \text{arbitrar}\\ b=1\\ c=0\end{cases}$ 1p

Problema 4.

Unui angajat al unei firme de vânzări autoturisme i se acordă, pe lângă salariul de bază de 400 RON/lună și un comision din vânzări după cum urmează: dacă reușește să vândă cel puțin 20 de mașini în acea lună, i se dă un comision de 300 RON pentru fiecare mașină vândută, iar pentru ceea ce depășește 20 de mașini vândute i se dă un comision de 400 RON pentru fiecare mașină vândută.

a) Determinați funcția pe baza căreia i se calculează salariul vânzătorului.

b) Cât primește el într-o lună pentru 10 mașini vândute?

c) Câte mașini trebuie să vândă într-o lună pentru a câștiga 10000 RON în acea lună?

SOLUȚIE:

a) $f(n)=400+\begin{cases}300n, \text{dacă } n\leq20\\ 6000+400(n-20), \text{dacă } n>20\end{cases}$, n fiind numărul mașini vândute ....
3p

b) $f(10)=400+300\cdot10=3400$ RON 1p

c) Este necesar să vândă mai mult de 20 de mașini pentru că $f(20)=6400$ 2p

$6400+400(n-20)=10000\Rightarrow n=29$ 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*