MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a, b, c numere reale.

a) Calculați B^2 și B^3.
b) Calculați B^{2018}.
c) Demonstrați că $A=a\cdot I_3+b\cdot B+c\cdot B^2$.

SOLUȚIE:

a) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$ 1p

b) Observăm că $B^{3k}=I_3$; $B^{3k+1}=B$; $B^{3k+2}=B^2$, pentru k număr natural 2p

$2018=3\cdot 672+2\Rightarrow B^{2018}=B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

c) Calcul direct. 2p

Problema 2.

Fie punctele $A(1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-2, 2)$, $D(a, 3a-2)$, unde a este un număr real.
a) Calculați aria triunghiului ABC.
b) Pentru ce valori ale numărului real a, punctele A, B, D sunt coliniare?

SOLUȚIE:

a) Aria triunghiului *ABC* este $\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -13$ 2p

Aria triunghiului *ABC* este $\frac{13}{2}$. 1p

b) *A, B, D* coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_D \\ y_A & y_B & y_D \end{vmatrix} = 0$ 2p

Obținem $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 3a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{7}$. 2p

Problema 3.

Fie *x* un număr real și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $(A(x))^2 = 2x \cdot A(x)$, pentru orice *x* număr real.

b) Aflați numărul real *x* astfel încât $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

c) Demonstrați că nu există matrice *X* de ordinul 2 cu elementele numere reale astfel încât $X^2 = A(0)$.

SOLUȚIE:

a) $(A(x))^2 = A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2x(x+1) & 2x(x^2-1) \\ 2x & 2x(x-1) \end{pmatrix} = 2x \cdot A(x)$, pentru orice *x* număr real. 2p

b) Obținem: $\left((A(x)^2\right)^2 = (2x \cdot A(x))^2 = 4x^2 \cdot (A(x))^2 = 8x^3 \cdot A(x)$ și ecuația devine $(8x^3 + 2x) \cdot A(x) = O_2$. 1p

Evident $A(x) \neq O_2 \Rightarrow 8x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$. 1p

c) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Notăm $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Evident $X^2 \cdot X = X \cdot X^2$.

Dacă presupunem că $X^2 = A(0)$, atunci $A(0) \cdot X = X \cdot A(0)$ 1p

Obținem: $\begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ c+d & -c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ -a-b = b-d \\ c+d = a-c \\ -c-d = b-d \end{cases} \Rightarrow c = -b;\ d = a + 2b \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$ 1p

Din $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ obținem sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab + 2b^2 = -1 \\ a^2 + 4ab + 3b^2 = -1 \end{cases}$.

Scăzând ultimele două ecuații membru cu membru, obținem $(a+b)^2 = 0 \Rightarrow a = -b$ și înlocuind în prima ecuație obținem 0 = 1 (fals!) 1p

Problema 4.

Numim cod o matrice A de ordin 3 care are trei elemente egale cu 1, iar restul egale cu 0. Dacă, în plus, $\det A \neq 0$, codul se numește supercod.

a) Dați exemplu de un cod și un exemplu de supercod.

b) Dacă A este un supercod, arătați că pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1.

c) Care este numărul codurilor pe care le putem forma?

SOLUȚIE:

a) Exemplu de cod: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Exemplu de supercod: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

b) Fie A supercod, atunci pe fiecare linie (coloană) există cel puțin un 1 (în caz contrar, o linie (coloană) conține numai zerouri, deci $\det A = 0$). 1p

Dar matricea are trei elemente egale cu 1. În concluzie, pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1. .... 1p

c) Trebuie completate 9 locuri cu trei de 1 și șase de 0. .... 1p

Trebuie alese trei locuri dintre 9 locuri și completate cu 1. Sunt $C_9^3 = 84$ coduri. 2p