INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ 16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Se consideră mulțimea $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

a) Demonstrați că pentru orice $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, dacă $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, atunci $a=c$ și $b=d$

b) Determinați $x,y\in\mathbb{Q}$ care verifică egalitatea $\dfrac{x+y\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=2$

c) Arătați că numerele $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2$ și $\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ sunt din $Q\left(\sqrt{2}\right)$.

d) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ nu există n numere din $Q\left(\sqrt{2}\right)$ încât suma pătratelor lor să fie $1+\sqrt{2}$.

SOLUȚIE:

a) $b\neq d \Rightarrow \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ (F) $\Rightarrow b=d$ 1p

$b=d \Rightarrow a=c$ 1p

b) $x+y\sqrt{2}=4-\sqrt{2} \Rightarrow x=4,\ y=-1$ 2p

c) Verificare 1p

d) Fie $1+\sqrt{2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 1+\sqrt{2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2a_ib_i\sqrt{2}+2b_i^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2b_i^2\right)+\left(2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2b_i^2\right)=1$ și $2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=1$ 1p

$\Rightarrow 1-\sqrt{2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^2$, contradicție cu $1-\sqrt{2}<0$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 2.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ;\ x<-1\\ x-2 & ;\ x\in[-1;1]\\ -3x+2; & x>1\end{cases}$. Se cere:

a) Arătați că rezultatul calculului $3f\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)+f\left(\sqrt{8}-1\right)$ este număr rațional.

b) Determinați numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $A(2;a)$ și $B(b;-2)$ sunt puncte pe graficul funcției f.

c) Determinați dacă există două numere $m,n\in\mathbb{R}$ încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să se verifice $f(x)=m\cdot|x+1|+n\cdot|x-1|$.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{2}-\frac{5}{2}<-1$, $\sqrt{8}-1>1$ 1p

$3f\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)+f\left(\sqrt{8}-1\right)=-13\in\mathbb{Q}$ 1p

b) $A(2;a)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=a$, respectiv $B(b;-2)\in G_f \Leftrightarrow f(b)=-2$ 1p

$a=-4$ 1p

$b=-\frac{1}{2}$ nu convine, $b\in\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$ 1p

c) Dacă există $m,n\in\mathbb{R}$ în condiția cerută, $f(1)=2m=-1$ și $f(-1)=2n=-3$ 1p

Din $f(x)=m\cdot|x+1|+n\cdot|x-1| \Rightarrow f(2)=3m+n=-3$ în contradicție cu $f(2)=-4$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX –a

Problema 3.

În triunghiul ABC cu laturile de lungimi $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ și $b\neq c$, considerăm $[AD$, cu $D\in(BC)$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ încât $[BM]\equiv[CN]$. Dacă P este mijlocul laturii $[BC]$ și Q este mijlocul segmentului $[MN]$, demonstrați următoarele:

a) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

c) $PQ\parallel AD$

SOLUȚIE:

a) Din teorema bisectoarei $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ 2p

b) $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$ 1p

$\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{O}$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{O}\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$ 1p

c) Dacă $BM=CN=d$, atunci $\overrightarrow{MB}=\dfrac{d}{c}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}=\dfrac{d}{b}\overrightarrow{AC}$ 1p

$\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\dfrac{d}{c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{d}{b}\overrightarrow{AC}=\dfrac{d}{bc}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)$ 1p

$\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\dfrac{d(b+c)}{bc}\cdot\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\dfrac{d(b+c)}{bc}\overrightarrow{AD}\Rightarrow PQ\parallel AD$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 4.

Un copil se joacă umplând cu semne ”x” și ”o” pătrățelele ultimei foi a unui caiet de lucru, după o regulă inventată de el: scrie un semn ”x”, apoi două semne ”o”, apoi trei ”x”, apoi patru ”o”, apoi cinci ”x” și continuă la fel până umple un careu pătrat cu 121 de pătrățele, după care își continuă jocul și se oprește când scrie al 2019-lea semn. Se cere:

a) Aflați care din cele două semne a fost scris ultimul în careul pătrat.
b) Aflați care din cele două semne este cel de al 2019-lea semn.
c) Arătați că numărul total al unuia din cele 2019 semne scrise este pătrat perfect.
d) Arătați că de fiecare dată când copilul scrie un semn ”o”, cel puțin unul din cele două totaluri de semne de același fel prezente la acel moment pe foaie este pătrat perfect.

SOLUȚIE:

a) În careul pătrat, copilul scrie ”x”-uri în număr de $a=1+3+5+7+...$, respectiv ”o”-uri în număr de $b=2+4+6+8+...$ 1p

cu un număr total $(1+2+3+...+n)+p=\frac{n(n+1)}{2}+p=121$, cu $n\in\mathbb{N}$ maxim posibil 1p

Cum $121=\frac{15\cdot 16}{2}+1=(1+3+...+15)+(2+4+6+...+14)+1$, al 121-lea semn scris este ”o” 1p

b) $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}\le 2019 \Leftrightarrow n(n+1)\le 4038$, $\sqrt{4038}\in(63;64)$ 1p

$\frac{63\cdot 64}{2}=2016<2019<\frac{64\cdot 65}{2}$, deci $2019=(1+2+3+...+63)+3$ și al 2019-lea semn scris este ”o” 1p

c) Numărul total al ”x”-urilor scrise este $1+3+5+...+63=32^2$ 1p

d) Numărul total al ”x”-urilor scrise este de forma $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ 1p