CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Demonstrați afirmațiile:

a) Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$.

b) Pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$, dacă $\sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$

c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

d) Mulțimea $A=\left\{\sqrt{n+1}+\sqrt{16n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$ conține doar două numere raționale.

SOLUȚIE:

a) Considerând $\sqrt{x}=\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, atunci $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ 1p

Deci dacă $x \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ 1p

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x}=a-\sqrt{y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{y}=\dfrac{a^2+y-x}{2a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{y} \in \mathbb{N}$. Analog $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ 1p

c) Considerând $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n}, \sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n}, \sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$ 1p

$\Rightarrow n=a^2,\ n+1=b^2 \Rightarrow n=0$, contradicție 1p

d) $\sqrt{n+1}+\sqrt{16n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{16n+1} \in \mathbb{N}$ 1p

$\begin{cases} n+1=a^2 \\ 16n+1=b^2 \end{cases} \Rightarrow 16a^2-b^2=15 \Rightarrow (4a-b)(4a+b)=15$, cu $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow A=\{2; 9\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 2.

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $1+\log_x \frac{5-x}{10} = (2\lg 2-1)\cdot \log_x 10$

b) Arătați că $x=3$ este singura soluție reală a ecuației $2^x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 7$.

SOLUŢIE:

a) Condiție de existență $x \in (0;\, 5)\setminus\{1\}$ 1p

Transformând în baza 10, se obține echivalenta $\lg x + \lg(5-x) = \lg 4$ 1p

$\Rightarrow$ $x(5-x)=4$, cu soluții $x_1=1$, $x_2=4$ 1p

și din condiția de existență rămâne soluție a ecuației inițiale doar $x=4$ 1p

b) $x=3$ verifică ecuația 1p

$x>3 \Rightarrow 2^x - 7 > 1 > \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 1p

$x<3 \Rightarrow 2^x - 7 < 1 < \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 3.

Considerând numărul complex $z=1-i\sqrt{3}$, se cere:

a) Să se arate că $z^2-2z+4=0$ și $z^3+8=0$

b) Să se demonstreze că numărul $t=\left(3z^2-4z+4\right)\left(z^2-3z+2\right)$ este real

c) Să se calculeze suma $S=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{16}z^5-\frac{1}{32}z^6$

SOLUȚIE:

a) Verifică / rezolvă $z^2-2z+4=0$ 2p

$z^2=2z-4 \Rightarrow z^3=2z^2-4z=2(2z-4)-4z=-8$ sau alternativă 1p

b) $t=(2z-8)(-z-2)=-2z^2+4z+16=24\in\mathbb{R}$ 2p

c) $z^2=2(z-2)$, $z^3=-8$, $z^4=-8z$, $z^5=-16(z-2)$, $z^6=64$ 1p

$\Rightarrow S=0$ 1p

Alternativă la c):

$S=\frac{z^3-2z^2+4z}{4}-\frac{z^6-2z^5+4z^4}{32}$ 1p

$\Rightarrow S=\frac{z\left(z^2-2z+4\right)}{4}-\frac{z^4\left(z^2-2z+4\right)}{32}=0$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 4.

Fie mulțimea $M=\left\{x(a;b)/\,x(a;b)=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbb{N}^*,\ a<b,\ (a;b)=1\right\}$, unde prin notația $(a;b)=1$ înțelegem că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. La fiecare $x(a;b)\in M$, numim *strada lui* $x(a;b)$ intervalul $s[a;b]$, cu $s[a;b]=\left[\frac{4ab-1}{4b^2};\frac{4ab+1}{4b^2}\right]$ iar numerele reale $x\in s[a;\,b]$ le numim *vecinii lui* $x(a;b)$.

a) Arătați că orice $x\in(0;1)$ este *vecin* al lui $x(a;b)$, dacă și numai dacă $\left|x-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{4b^2}$.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{5}}{4}$ *este vecin* al lui $x(1;2)$ și $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *nu este vecin* al lui $x(1;2)$.

c) Arătați că orice $x_0\in M$ are o infinitate de *vecini* $x\in M$ dar și o infinitate de $x\in M$ care *nu-i sunt vecini*.

SOLUŢIE:

a) $s[a;b]=\left[\frac{a}{b}-\frac{1}{4b^2};\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}\right]$ 1p

rezultă $x\in s[a;b]\Leftrightarrow\frac{a}{b}-\frac{1}{4b^2}\le x\le\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4b^2}\le x-\frac{a}{b}\le+\frac{1}{4b^2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{4b^2}$ 2p

b) $\frac{\sqrt{5}}{4}\in s[1;2]\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\le 9\Leftrightarrow 80\le 81$ (A), deci $\frac{\sqrt{5}}{4}\in s[1;2]$ 1p

$\frac{\sqrt{3}}{4}\in s[1;2]\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow 7\le 4\sqrt{3}\Leftrightarrow 49\le 48$ (F). deci $\frac{\sqrt{3}}{4}\notin s[1;2]$ 1p

c) Spre exemplu, pentru orice $x_0=x(a;b)\in M$, alegând $x_n=\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 3\Rightarrow x_n\in M$

și totodată $\left|x_n-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{4b^n}<\frac{1}{4b^2}\Rightarrow x_n\in s[a;b]$, cu $x_{n+1}<x_n$ 1p

Analog, observând că la orice $x_0=x(a;b)\in M$, $\frac{4ab+1}{4b^2}<1$, cum media aritmetică a două numere distincte este mijlocul intervalului celor două numere, șirul definit de recurența $y_1=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab+1}{4b^2}+1\right)$, $y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab+1}{4b^2}+y_n\right)$ va avea toți termenii din M și nici unul nu va fi vecin al lui $x_0=x(a;b)$ 1p