MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+3}\right)$.

b) Determnați $a\in(0;+\infty)$ și $b\in\mathbb{R}^*$ încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=2$.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)-3\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]=$ 1p

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}-\dfrac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}+2-\dfrac{9}{2}=-2$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx}{x^2-1}=0$ 1p

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=a^\infty=$ limită finită nenulă $\Rightarrow a=1$ 1p

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=e^b$ 1p

$e^b=2\Rightarrow b=\ln 2$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 2.

Considerând $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi și cu elemente din mulțimea numerelor reale, se cere:

a) Demonstrați că orice matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifică $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$.

b) Demonstrați că orice pentru orice alegere de două matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ are loc $\det(X \cdot Y) = \det X \cdot \det Y$

c) Considerând $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ încât $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2018 & 1 \\ 2019 & 1 \end{pmatrix}$ arătați că $A \cdot B$ este inversabilă și $B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2019 I_2$.

SOLUŢIE:

a) Calculează X^2 .... 1p
Finalizează verificarea 1p

b) Calculează $\det(X \cdot Y)$ 1p
Finalizează verificarea 1p

c) $\det(A \cdot B) = -1 \Rightarrow \det(B \cdot A) = -1 \Rightarrow B \cdot A$ inversabilă 1p
$B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2019 I_2 \Leftrightarrow (B \cdot A)^2 - 2019(B \cdot A) - I_2 = O_2$, confirmată de a) 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 3.

Considerând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-1}, & x\in(-\infty;\,0)\\ x^2-3, & x\in[0;\,2]\\ \sqrt{x-1}, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$, se cere:

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.

b) Rezolvați ecuația $f(x)\le 1$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că ecuația $x\cdot f(x)=3$ are o singură soluție $x\in(2;+\infty)$

SOLUŢIE:

a) asimptotă orizontală spre $-\infty$, de ecuație $y=2$ 1p
nu are asimptote spre $+\infty$ 1p
nu are asimptote verticale 1p

b) Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ și ecuația $f(x)-1=0$ are soluțiile $x_1=-4$ și $x_2=2$ iar din tabelul de semn se deduce $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\in[-4;\,2]$. 2p

c) Considerăm funcția continuă $g:(2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f(x)-3$, deci $g(x)=x\sqrt{x-1}-3$, care se dovedește strict crescătoare și cum $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x)=-1$ și $g(3)=3\left(\sqrt{2}-1\right)>0$, rezultă concluzia 2p

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI –a

Problema 4.

Considerând, în planul cartezian ortogonal, graficul G_f al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(3x^2-1)}{4(x^2+1)}$, respectiv punctele $A=A(-2;0)$, $B=B(2;3)$, $C=C(2;0)$ și $M_x=M(x;f(x))$, se cere:

a) Verificați că punctul C este pe graficul funcției f și arătați că acest grafic are asimptotă oblică spre $+\infty$ o dreaptă care trece prin C și este paralelă dreptei AB.

b) Folosind eventual cele verificate anterior, determinați limitele $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}A(x)$, $l_2=\lim\limits_{x\to\infty}d(x)$ și $l_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M_xA}{M_xB}$, unde $A(x)$ este aria triunghiului ABM_x, $d(x)$ este distanța de la punctul M_x la dreapta AB iar M_xA și M_xB sunt lungimile respectivelor segmente $[M_xA]$ și $[M_xB]$.

SOLUȚIE:

a) $f(2)=0 \Rightarrow C(2;0)\in G_f$ 1p

Obține ecuația asimptotei $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$ 1p

Obține panta $m_{AB}=\dfrac{3}{4}$ a dreptei AB 1p

Deduce $m=\dfrac{3}{4}$ panta asimptotei, din care rezultă paralelismul cerut de enunț 1p

b) Interpretând eventual datele punctului anterior, obține:

$l_1=\lim\limits_{x\to\infty}A(x)=12$ 1p

$l_2=\lim\limits_{x\to\infty}d(x)=\dfrac{12}{5}$ 1p

$l_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M_xA}{M_xB}=1$ 1p