MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII –a

Problema 1.

Pentru numerele impare $x \in \mathbb{Z}$, considerăm matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{A(x) / x \in \mathbb{Z},\ x \text{ număr impar}\}$.

a) Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G și $(G;\cdot)$ este grup abelian.

b) Arătați că orice matrice $A(x)$ din G este inversabilă în $(G;\cdot)$, cu toate că $\det A(x) = 0$. Explicați acest fapt.

c) Demonstrați că $f : G \to 2\mathbb{Z}$, $f(A(x)) = x+1$ este izomorfism de la $(G;\cdot)$ la $(2\mathbb{Z};+)$, unde $2\mathbb{Z} = \{2x / x \in \mathbb{Z}\}$.

SOLUȚIE:

a) Se verifică $A(x)\cdot A(y) = A(x+y+1)$ și cum $x+y+1$ este întreg impar la orice $x, y \in \mathbb{Z}$ impare, ”$\cdot$” este lege de compoziție pe G 1p
Conform cu $A(x)\cdot A(y) = A(x+y+1)$, $(G;\cdot)$ este structură comutativă și asociativă 1p
cu element neutru $E = A(-1) \in G$ 1p
În $(G;\cdot)$, inversa matricei $A(x) \in G$ este matricea $A(-x-2) \in G$ 1p

b) În acest caz $E \neq I_3$ și inversabilitatea se referă la structura $(G;\cdot)$, nicidecum la structura $(M_2(R);\cdot)$, în care $A(x)$ nu sunt inversabile 1p

c) Funcția f este bijectivă 1p
cu $f(A(x)\cdot A(y)) = f(A(x+y+1)) = f(A(x)) + f(A(y))$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 2.

Pe $\mathbb{Z}$ definim legea $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Se cere:

a) Arătați că ”$\circ$” este asociativă și $(\mathbb{Z};\circ)$ are element neutru $e = 4$.

b) Determinați mulțimea elementelor inversabile în $(\mathbb{Z};\circ)$.

c) Cu notația $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{x \text{ apare de n-ori}}$, rezolvați ecuația $x^{(2019)} = x$, în necunoscuta $x \in \mathbb{Z}$.

SOLUȚIE:

a) $x \circ y = (x-3)(y-3)+3 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = (x-3)(y-3)(z-3)+3$

sau verificare prin calcul direct 1p

Verificare $x \circ 4 = 4 \circ x = x$ 1p

b) $x \circ x' = x' \circ x = e \Rightarrow x' = \dfrac{3x-8}{x-3} \Rightarrow x \in (\mathbb{Z};\circ)$ este inversabil $\Leftrightarrow \dfrac{3x-8}{x-3} \in \mathbb{Z}$ ……………………….. 1p

$\dfrac{3x-8}{x-3} = 3 + \dfrac{1}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{2;4\}$ ……………………………………………………………… 1p

c) $x \circ x = (x-3)^2 + 3$ 1p

$x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{x \text{ apare de n-ori}} = (x-3)^n + 3$ 1p

$x^{(2019)} = x \Leftrightarrow (x-3)^{2019} - (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \in \{0;-1;1\} \Leftrightarrow x \in \{2;3;4\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 3.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și F primitiva funcției f, care verifică $F(1)=0$.

a) Arătați că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{e-1}{2}$.

b) Calcuați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

SOLUȚIE:

a) $x^2=t$, $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 x e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{e-1}{2}$ 2p

b) Integrare prin părți: $\begin{cases} u=F(x) \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=f(x) \\ v=x \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 F(x)dx=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf(x)dx=-\frac{e-1}{2}$ 1p

c) $\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$ 1p

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=e$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 4.
În urma unui studiu, s-a constatat că rata de memorare a cuvintelor vocabularului limbii engleze, pe parcursul unei lecții de 50 minute, este dată de relația $M(t)=[f(t)]$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului $x\in\mathbb{R}$ iar f este o funcție $f:[0;50]\to\mathbb{R}$, care verifică $f'(t)=\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}$ și $f(0)=0$, respectiv $M(t)$ reprezintă numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant pe intervalul de minute $[0;t]$ din parcursul lecției.

a) Arătați că $f(t)=\frac{t^2(90-t)}{3000}+\frac{3t}{t+1}$.
b) Determinați numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant la momentul de minut $t=10$ al lecției.
c) Determinați câte cuvinte noi memorează un cursant în intervalul ultimelor 20 de minute din parcursul orei.

SOLUȚIE:

a) $f(t)\in\int\left(\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt$ 1p

$\int\left(\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{3t^2}{100}-\frac{t^3}{3000}-\frac{3}{(t+1)}+k=\frac{t^2(90-t)}{3000}-\frac{3}{(t+1)}+k,\ k\in\mathbb{R}$ 2p

$f(0)=0\ \ k=3$ 1p

b) $f(10)=5,3...$ 1p

$\Rightarrow M(10)=[f(10)]=5$ 1p

c) $M(50)-M(30)=36-20=16$ 1p