MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1. Un stadion are 20000 de locuri. Se desfăşoară un meci şi se vând toate biletele. Spectatorii intră pe stadion după următoarea regulă: în primul minut intră doi spectatori, în al doilea minut intră şase spectatori, în al treilea minut intră zece spectatori şi aşa mai departe până se umple stadionul. În cât timp se umple stadionul?

SOLUŢIE:

Notăm cu $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, numărul de spectatori care intră pe stadion în momentul n.

Avem: $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 10$.

Se deduce că $(a_n)_{n\geq 1}, n \in \mathbb{N}$ este o progresie aritmetică cu $a_1 = 2, r = 4$.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(2 + 4n - 2)\cdot n}{2} = 2n^2.$$

$S_n = 20000$, deci $2n^2 = 20000$ și obținem $n = 100$.

Notează $a_n, n \in \mathbb{N}^*$ numărul de spectatori care intră pe stadion în minutul n 1p

Găseşte $(a_n)_{n\geq 1}, n \in \mathbb{N}$ progresie aritmetică cu $a_1 = 2, r = 4$ 2p

Scrie suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ 1p

$S_n = \frac{(2 + 4n - 2)\cdot n}{2} = 2n^2$...1p

Rezultă $S_n = 20000$, şi determină $n = 100$. 2p

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D,E,F, astfel încât: D este mijlocul lui BC , E este mijlocul lui AD şi F este mijlocul lui AE .

Să se demonstreze că:

a) $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}}{4}$.

b) $\overrightarrow{FC}=\dfrac{7\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{8}$.

SOLUŢIE:

a) În $\triangle BAD$, BE este mediană şi avem:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\ =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}}{4}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}}{4}=\frac{\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}}{4}.$$

b) În $\triangle ACE$, CF este mediană şi obţinem: $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}$

CE este mediană în $\triangle CAD$ şi avem: $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$

şi obţinem:

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\ +\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CA}}{4}$$

D – mijlocul $BC\ \Rightarrow \overrightarrow{CD}=\dfrac{\overrightarrow{CB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{2}$ şi $\overrightarrow{CF}=\dfrac{7\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{8}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}}{8}$

Deci $\overrightarrow{FC}=\dfrac{7\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{8}$

a) Figura 1p

$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$ 1p

Înlocuieşte $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 1p

Finalizează 1p

b) $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}$ 1p

Găseşte $\overrightarrow{CF}=\dfrac{\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CA}}{4}$ 1p

Finalizează 1p

Problema 3.

a) Calculaţi numerele x şi y ştiind că numerele $x-1, 3x-4, x+5$ formează, în această ordine, o progresie aritmetică, iar numerele $2, \sqrt{11+5y}, 1+7y$, formează, în această ordine, o progresie geometrică.

b) Se consideră o mulţime H de numere reale care are proprietăţile $1\in H$ și dacă $2h\in H$, atunci $h\in H$. Demonstraţi că $\dfrac{1}{8}\in H$.

SOLUȚIE:

a) Condiţia ca numerele $x-1, 3x-4, x+5$ să fie în progresie aritmetică este echivalentă cu $2(3x-4)=x-1+x+5$; de aici avem $x=3$. Condiţia ca $2, \sqrt{11+5y}, 1+7y$ să fie în progresie geometrică este echivalentă cu $2(1+7y)=11+5y$, în condiţiile $\begin{cases}11+5y\geq 0\\1+7y\geq 0\end{cases}$, obţinem $y=1$.

b) $1\in H$

$1=2\cdot\frac{1}{2}\in H\Rightarrow\frac{1}{2}\in H$

$\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{4}\in H\Rightarrow\frac{1}{4}\in H$

$\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{8}\in H\Rightarrow\frac{1}{8}\in H$

BAREM:

a) Scrie condiţia $2(3x-4)=x-1+x+5$ 1p

Determină $x=3$ 1p

Scrie condiţia $2(1+7y)=11+5y$ şi condiţiile de existenţă 1p

Determină $y=1$. 1p

b) Justifică faptul că $\frac{1}{2}\in H$ 1p

Justifică faptul că $\frac{1}{4}\in H$ 1p

Justifică faptul că $\frac{1}{8}\in H$ 1p

Problema 4. Într-un pom fermecat sunt 2018 de mere, 2019 de portocale și 2020 de pere. Din pom, se pot lua o dată numai două fructe de feluri diferite și, în acest caz, în pom crește un fruct din al treilea fel. Știind că se culeg fructe din pom până ce rămâne un singur fruct, determinați care este acesta.

BAREM:

Oricum am alege cele două fructe diferite, după ce se mărește numărul de fructe din cealaltă categorie cu o unitate, numărul merelor și numărul perelor au aceeași paritate.......................................4p
La sfârșit nu poate rămâne un măr și zero pere, dar nici o pară și zero mere.................................2p
Ultimul fruct rămas în copac este o portocală...1p