MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $2\log_2^2\ 4x^2\ -\log_2\ 8x\ +\frac{1}{2}=0.$

b) $32^{\frac{x+7}{x-5}}=0,25\cdot 128^{\frac{x+19}{x-1}}$.

SOLUȚIE:

a) C.E. $x>0$

Notăm $\log_2 x=t, t\in\mathbb{R}$

$$\log_2\ 4x^2\ =\log_2 4+\log_2 x^2=2+2\log_2 x=2+2t$$

$$\log_2\ 8x\ =\log_2 8+\log_2 x=3+\log_2 x=3+t$$

Ecuaţia devine:

$$2(2+2t)^2-3-t+\frac{1}{2}=0 \text{ sau } 16(t+1)^2-6-2t+1=0\Leftrightarrow 16t^2+32t+16-2t-5=0\Leftrightarrow$$

$$16t^2+30t+11=0$$

Se obţine: $t_1=-\frac{1}{2}, t_2=-\frac{11}{8}$

Deci $\log_2 x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\log_2 x=-\frac{11}{8}\Rightarrow x=\frac{\sqrt[8]{2^5}}{4}$

Deci soluţia: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt[8]{2^5}}{4}\right\}.$

b) C.E.: $\begin{cases}x-5\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 5\\ x\neq 1\end{cases}$

$$2^{5\cdot\frac{x+7}{x-5}}=2^{-2}\cdot 2^{7\cdot\frac{x+19}{x-1}}\Leftrightarrow 5\cdot\frac{x+7}{x-5}=-2+7\cdot\frac{x+19}{x-1}\Leftrightarrow\frac{5(x+7)}{x-5}=-2+\frac{7(x+19)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$5(x+7)(x-1)=(x-5)(-2x+2+7x+133)\Leftrightarrow 5\ x^2+6x-7\ =(x-5)(x+2)\cdot 5\Leftrightarrow 16x=128\Leftrightarrow x=8$$

BAREM:

a) Condiţii de existenţă

Notaţie $\log_2 x = t, t \in \mathbb{R}$ $\log_2^2 (4x^2) = (2+2t)^2$ $\log_2 (8x) = 3+t$ 2p

Rezolvă ecuaţia $16t^2 + 30t + 11 = 0$ 1p

Determină soluţia $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt[8]{2^5}}{4} \right\}$. 1p

b) Condiţia de existenţă şi relaţia: $2^{5 \cdot \frac{x+7}{x-5}} = 2^{-2} \cdot 2^{7 \cdot \frac{x+19}{x-1}}$ 1p

Relaţia $\frac{5(x+7)}{x-5} = -2 + \frac{7(x+19)}{x-1}$ 1p

Determină $x = 8$ 1p

Problema 2. O minge de baschet are traiectoria parabolică descrisă de ecuaţia $y = -x^2 + 6x - 5$, cu $x \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$.
Este posibil ca mingea să intre în coşul de baschet situat la înălţimea de 3m? Justificaţi răspunsul.

SOLUŢIE:

$y = -x^2 + 6x - 5,\ x \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$.

Considerăm funcţia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Graficul funcţiei este o parabolă.

$V(3,4),\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 1,75,\ \ f(5) = 0,\ A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), B(5,0)$

Arcul de parabolă AB este traiectoria mingii de baschet. Pentru ca mingea să intre în coş la înălţimea $h = 3$m rezolvăm $f(x) = 3$ şi obţinem $x_1 = 2$ (nu convine) sau $x_2 = 4$.

Soluţia este $x = 4$.

BAREM:

Scrierea funcţiei: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5$ 1p

Determinarea $V(3,4), A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), B(5,0)$ 2p

Traiectoria mingii 2p

Rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 3$ 1p

Justifică alegerea soluţiei $x = 4$. 1p

Problema 3. Ionuţ a primit cadou de ziua lui o motocicletă Honda. A doua zi Ionuţ parcurge, într-o mişcare rectilinie şi uniformă, distanţa de 120 km dintre localităţile A şi D, cu viteza constanta v, trecând prin localităţile B şi C ($B, C \in AD, AB = BC = CD = \frac{AD}{3}$). Arătaţi că, dacă Ionuţ ar parcurge, cu motocicleta cea nouă, fiecare dintre distanţele AB, BC, CD cu o altă viteză, astfel încât media aritmetică a vitezelor să fie totuşi egală cu *v*, atunci timpul necesar parcurgerii distanţei AD ar fi mai mare decât în cazul parcurgerii întregii distanţe cu viteza constantă *v*.

SOLUȚIE:

Din condiția $AB = BC = CD = \frac{AD}{3} = d$ avem $d = 40\,\text{km}$

Fie v_1, v_2, v_3 vitezele cu care parcurge distanţele AB, BC, CD, respectiv t_1, t_2, t_3 timpii corespunzători.

Avem: $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$

$t_1 = \frac{40}{v_1}, t_2 = \frac{40}{v_2}, t_3 = \frac{40}{v_3}$ și $t = \frac{120}{v}$

Demonstrăm că $t_1 + t_2 + t_3 > t$ relaţie echivalentă cu

$$40\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) > \frac{120}{v} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} + \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} > 6$$

Dar:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} \geq 2 \\ &\frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} \geq 2 \\ &\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} \geq 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9$$ (inegalitate strictă deoarece avem $v_1 \neq v_2$ sau $v_1 \neq v_3$ $v_2 \neq v_3$)

<u>BAREM:</u>

Notează v_1, v_2, v_3 vitezele pe segmentele AB, BC, CD, şi t_1, t_2, t_3 timpii 1p

Trebuie sa demonstrăm inegalitatea $t_1 + t_2 + t_3 > t$ (*) 1p

Exprimă t_1, t_2, t_3, t în funcţie de v_1, v_2, v_3, t 1p

Scriem inegalitatea (*) sub forma $\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9$ 1p

Stabileşte echivalenţa relaţiei (*) cu $\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} + \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} > 6$ 1p

$\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} \geq 2$

$\frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} \geq 2$ 1p

$\frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} \geq 2$

Finalizare 1p

Problema 4. Determinaţi $x, y \in \mathbb{N}$, ştiind că $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + ... + 2^{x+y} = 992.$

SOLUŢIE:
Relaţia din enunţ este echivalentă cu:

$$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + ... + 2^x \cdot 2^y = 992 \Leftrightarrow 2^x \cdot \ 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^y \ = 992 \Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{2^{y+1} - 1}{2 - 1} = 992 = 2^5 \cdot 31$$

$$2^{y+1} - 1 \text{număr impar} \quad 2^{y+1} - 1, 2^x \ \in \ 1, 992 \ , \ 31, 32 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

<u>BAREM:</u>

Scoate factor comun 2^x 1p

Scrie suma $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^y = 2^{y+1} - 1$ 2p

Determină ecuaţia $2^x \ 2^{y+1} - 1 \ = 992$ 1p

Descompune $992 = 2^5 \cdot 31 = 1 \cdot 992$ 1p

Determină $2^{y+1} - 1 = 31 \Rightarrow y = 4$ 1p

Determină $2^x = 2^5$ cu $x = 5$ 1p