CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați: A^3-A^2+A.

b) Calculați: $I_3+A-A^2+A^3+A^4-A^5+A^6+...+A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}$.

BAREM:

a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$A^3-A^2+A=O_3$. 2p

b) Din a) avem: $A-A^2+A^3=O_3$, $A^4-A^5+A^6=O_3,\dots,$ $A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}=O_3$ 1p

Există 673 grupe în suma $(A-A^2+A^3)+(A^4-A^5+A^6)+...+(A^{2017}-A^{2018}+A^{2019})$ 1p

În concluzie, $I_3+A-A^2+A^3+A^4-A^5+A^6+...+A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}=I_3$ 1p

Problema 2.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente numere reale $M(A)=\{X \mid XA=AX\}$.

a) Demonstrați că dacă $X\in M(A)$, atunci există numerele reale *x* și *y* astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

b) Rezolvați ecuația $X+X^2=A$ în mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente numere reale.

BAREM:

a) Fie $X\in M(A)$, $X=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}$, x, y, z, t numere reale.

Din $XA=AX$ rezultă $\begin{pmatrix}2x+3z & 2z\\ 2y+3t & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2z\\ 3x+2y & 3z+2t\end{pmatrix}$ 1p

Obținem sistemul $\begin{cases} 2x+3z=2x \\ 2y+3t=3x+2y \\ 2t=3z+2t \end{cases}$ 1p

Urmează $z = 0$, $t = x$. În concluzie, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, cu x, y numere reale...1p

b) Dacă în relația $X + X^2 = A$ înmulțim cu X la stânga și apoi la dreapta obținem: $X^2 + X^3 = XA$ și $X^2 + X^3 = AX$, de unde rezultă $AX = XA$, iar din a) rezultă $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ 1p

$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$..1p

$X^2 + X = \begin{pmatrix} x^2+x & 0 \\ y+2xy & x^2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ de unde rezultă $\begin{cases} x^2+x=2 \\ y+2xy=3 \end{cases}$...1p

Rezolvând sistemul precedent obținem soluțiile: (1, 1) și (-2, -1) 1p

Problema 3.

Se consideră determinantul $D(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2+1 & y^2+1 & 5 \end{vmatrix}$, unde x, y sunt numere reale.

a) Demonstrați că $D(x,y) = (x-2)(y-2)(y-x)$, pentru orice numere reale x, y.
b) Determinați numerele reale x pentru care $D(2^x, 4^x) = 0$.

SOLUȚIE:

a) $D(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + xy^2 - x^2y - 4x + 4y$ 2p

$D(x,y) = -2(y^2 - x^2) + xy(y-x) + 4(y-x) = -2(y-x)(y+x) + xy(y-x) + 4(y-x)$

Rezultă $D(x,y) = (y-x)(-2y-2x+xy+4) = (y-x)[y(x-2)-2(x-2)] = (x-2)(y-2)(y-x)$..............2p

b) Din a) avem: $D(2^x, 4^x) = (2^x-2)(4^x-2)(4^x-2^x) = 0$...1p

Urmează $2^x = 2$; $4^x = 2$; $4^x = 2^x$ 1p

Rezolvând ecuațiile anterioare obținem $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ 1p

Problema 4.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Andrei obține noi matrice schimbând semnele tuturor elementelor dintr-o linie sau coloană din matricea A și apoi urmând același procedeu cu matricele obținute.

a) Calculați determinantul matricei A.
b) Scrieți un șir de transformări p în care plecând de la matricea A, Andrei obține o matrice cu prima linie cu toate elementele egale cu -1.
c) Poate obține Andrei o matrice în care două linii au toate elementele egale cu 1?

SOLUȚIE:

a) det A = 4..2p

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

sau $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2p

c) Dacă B este obținută din A și are două linii cu toate elementele egale cu 1, rezultă că $\det B = 0$.............2p
Dar $|\det B| = |\det A|$, fals 1p