

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A IX-A**

**Subiectul I**

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ .

- a. Rezolvați  $(f \circ f)(x) = \sqrt{5}$ .
- b. Arătați că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(-1, +\infty)$ .
- c. Rezolvați în  $(-1, +\infty)$  ecuația  $f(x) + f(2x) = f(3x) + f(2008x)$ .

**Subiectul II**

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + bx + c; b, c \in \mathbb{Z}$ .

- a. Arătați că  $f(x)=0$  are rădăcini raționale dacă și numai dacă  $\Delta$  este pătrat perfect.
- b. Dacă  $b, c$  sunt numere întregi impare, atunci ecuația  $f(x)=0$  nu are rădăcini întregi.
- c. Dacă  $f$  are ambele rădăcini numere întregi și există  $t \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $f(t)=6$ , atunci  $f(t+3) \geq 6$ .

**Subiectul III**

Se consideră  $\Delta ABC$  în care  $AB=12$ , iar  $AC=16$ .

- a. Dacă  $P \in BC$  și  $\frac{BP}{PC} = k$ , atunci  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC}$ .
- b. Dacă  $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ , atunci  $[AM]$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ .

**Subiectul IV**

Se consideră triunghiul  $ABC$  cu aria  $S$  și punctele  $A_1, B_1, C_1$ , mijloacele laturilor  $BC, AC$ , respectiv  $AB$ . Dacă  $A_2, B_2, C_2$  sunt mijloacele laturilor  $B_1C_1, A_1C_1$ , respectiv  $B_1A_1$  și repetăm procedeul astfel încât  $A_n, B_n, C_n$  sunt mijloacele laturilor  $B_{n-1}C_{n-1}, A_{n-1}C_{n-1}$ , respectiv  $B_{n-1}A_{n-1}$ , iar  $S_n, n \geq 1$  este aria triunghiului  $A_n B_n C_n$ , se cere:

- a. Exprimați  $S_2$  în funcție de  $S$ .
- b. Arătați că  $S_1, S_2, \dots, S_n$  formează o progresie geometrică.
- c. Arătați că  $S_1 + S_2 + \dots + S_n < \frac{S}{3}$ .

**Nota:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7