CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII-A

Subiectul I

Se consideră mulțimea $G=\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in Z, a^2-2b^2=1\}$.

a. Să se arate că $3+2\sqrt{2}\in G$.

b. Să se demonstreze că dacă x,y∈ G, atunci $x\cdot y\in G$.

c. Să se demonstreze că mulțimea G are cel puțin 2008 elemente.

Subiectul II

Se consideră mulțimea M a tuturor numerelor întregi impare şi operațiile:

$x\oplus y=x+y-1; x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3), \forall x,y\in M$.

a. Să se arate că operațiile de mai sus sunt legi de compoziție pe M.

b. Să se determine elementul neutru al legii "$\circ$".

c. Să se determine elementele inversabile față de legea "$\circ$".

Subiectul III

Fie şirul $\left(I_n\right)_{n\in N^*}, I_n=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx, \forall n\in N^*$.

a. Să se calculeze I_2 şi I_3.

b. Să se demonstreze că $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\cdot I_n, \forall n\in N^*$.

Subiectul IV

Fie funcția $f:[1,2]\to R, f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

a. Să se arate că $F:[1,2]\to R, F(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$ este o primitivă a funcției f.

b. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7