CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI
Filiera teoretică, profil umanist

$\Delta_1 = m^6 + m^4 + m^2 = m^2\left(m^4 + m^2 + 1\right) = -\Delta_2 = -\Delta_3 \Rightarrow S: \left\{\frac{m^2}{1-m^2}, \frac{m^2}{m^2-1}, \frac{m^2}{m^2-1}\right\}$ 1p

Dacă $m = \pm 1$ obținem sistemul $\begin{cases} x + z = -1 \\ -y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Alegem un minor principal $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Există un singur minor caracteristic $\neq 0$, deci, conform teoremei lui Rouche, sistemul este incompatibil 1p

b)

$\Delta = 0 \Rightarrow \left(m^3 - 1\right)\left(m^3 + 1\right) = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 1; m_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}; m_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ 2p

Se face tabla înmulțirii pe mulțimea $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$, se verifică proprietățile (axiomele) grupului. Elementul neutru este 1. Inversele sunt:

$1^{-1} = 1; (-1)^{-1} = -1; m_3^{-1} = m_4; m_4^{-1} = m_3; m_5^{-1} = m_6; m_6^{-1} = m_5$ 2p

Subiectul 4.

a1) Fie $x \in G, x \neq e.$ Atunci $x^2 \neq x$ şi conform ipotezei $(\exists) H_1, H_2$ subgrupuri astfel încât $x \in H_1, x^2 \in H_2, H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

Din $x \in H_1 \Rightarrow x^2 \in H_1$ şi cum $x^2 \in H_2 \Rightarrow x^2 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x^2 = e$

Deci $x^2 = e, (\forall) x \in G$ (deoarece şi $e^2 = e$) şi din condiția $x^2 = e$, se ştie că G este grup abelian. 2p

a2) Deoarece $x^2 = e, (\forall) x \in G \Rightarrow x^n = \begin{cases} e, n \text{ par} \\ x, n \text{ impar} \end{cases}$.

Pentru n par ecuația devine e = a, deci a = e, mulțimea soluțiilor este grupul G, iar dacă $a \neq e$, mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru n impar obținem x = a cu soluția $a \in G$ 2p

b) Fie e elementul neutru al grupului G.

Demonstrăm că $(\forall) x \in G - \{e\}$ avem $x \neq x^{-1}$.

Prin reducere la absurd presupunem că $(\exists) x \in G - \{e\}$ astfel încât $x = x^{-1}$.

Înmulțind cu x $\Rightarrow x^2 = e, \text{cu } x \neq e.$ Dar $x^2 = f(x), e = f(e) \Rightarrow f(x) = f(e)$

f fiind injectivă $\Rightarrow$ x = e (F), deci $x \neq x^{-1}$.

Grupăm elementele mulțimii G - {e} în perechi formate din câte un element al mulțimii şi inversul său. Deci G - {e} are un număr par de elemente, deci G are un număr impar de elemente 3p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI
Filiera teoretică, profil umanist

$$\begin{pmatrix} 2x^n & 2x^n & 2x^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^n \end{pmatrix}.$$

Ecuația devine: $\left(18x^n\right) = 6 \Rightarrow \left(3x^n\right) = (1) \Rightarrow 3x^n = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 2p

Subiectul 2.
a)

Sistemul se scrie $\begin{cases} \left(a - \frac{1}{3}\right)x + by + cz = 0 \\ cx + \left(a - \frac{1}{3}\right)y + bz = 0 \\ bx + cy + \left(a - \frac{1}{3}\right)z = 0 \end{cases}$ 1p

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - \frac{1}{3} & b & c \\ c & a - \frac{1}{3} & b \\ b & c & a - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(a - \frac{1}{3}\right)^3 + b^3 + c^3 - 3bc\left(a - \frac{1}{3}\right)$$ 1p

$$\Delta = \left(a + b + c - \frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a - \frac{1}{3} & b \\ b & c & a - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(a + b + c - \frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a - c - \frac{1}{3} & b - a + \frac{1}{3} \\ b & c - b & a - c - \frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

$= \left(a + b + c - \frac{1}{3}\right)\left[\left(a - c - \frac{1}{3}\right)^2 - (c - b)\left(b - a + \frac{1}{3}\right)\right] \neq 0$ deoarece $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 3p

Sistemul fiind omogen şi $\Delta \neq 0$ rezultă că sistemul are o singură soluție,
soluția banală $(0,0,0)$ 2p

Subiectul 3.
a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m^2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m^2 \\ 1 & m^2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^6$$ 1p

Discuție: Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ sistemul este compatibil determinat (Cramer)

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

Subiectul 1.

a) $A \cdot B = (\alpha)$, unde $\alpha = ax + by + cz$. $\quad (A_{13} \cdot B_{31} = C_{11})$,

$B \cdot A = \begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix}$; $\quad (B_{31} \cdot A_{13} = D_{33})$ 1p

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ rang (AB) = 1;

$\alpha = 0 \Rightarrow$ rang(AB) = 0

rang (BA) $\leq$ 1 deoarece liniile respectiv coloanele sunt proporționale 1p

rang (BA) = 0 dacă $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ ....

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 \\ x^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

deci

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & x^n & 0 \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}, n = 3k \\ \begin{pmatrix} 0 & x^n & 0 \\ 0 & 0 & x^n \\ x^n & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 3k+1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^n \\ x^n & 0 & 0 \\ 0 & x^n & 0 \end{pmatrix}, n = 3k+2 \end{cases}$$

sau notând $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_0^3 = I_3$, deci

$$A^n = \begin{cases} x^n \cdot I_3, n = 3k \\ x^n \cdot A_0, n = 3k+1 \\ x^n A_0^2, n = 3k+2 \end{cases}$$ 1p

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} A^n = \begin{pmatrix} 2x^n & 2x^n & 2x^n \end{pmatrix}$ 1p