CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII-A

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cu elemente numere reale.

a) Să se calculeze produsele $A\cdot B$ şi $B\cdot A$ şi să se determine rangul acestora.

b) Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $x>0$.

Să se rezolve ecuația matricială: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot A^n\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$

2. Fie sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{3}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{3}y, \quad a,b,c\in\mathbb{Z} \\ bx+cy+az=\frac{1}{3}z \end{cases}$

a) Să se calculeze determinatul asociat matricei sistemului.

b) Câte soluții are sistemul ?

3. Se dă sistemul $\begin{cases} m^2x+z=-m^2 \\ m^2z-y=m^2 \quad , \quad m\in\mathbb{R} \\ m^2y+x=m^2 \end{cases}$

a) Să se rezolve şi să se discute sistemul.

b) Să se arate că rădăcinile ecuației $\Delta = 0$ formează un grup multiplicativ, unde Δ este determinatul sistemului.

4.

a) Fie $(G,\cdot)$ un grup astfel încât $(\forall)x,y\in G, x\neq y,$ există H_1, H_2 subgrupuri ale lui G astfel încât $x\in H_1, y\in H_2$ şi $H_1\cap H_2=\{e\}$. Să se arate că:

a_1) $(G,\cdot)$ este comutativ.

a_2) Să se rezolve îan G ecuația $x^n=a$ cu $a\in G, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcția $f:G\to G, f(x)=x^2$ este automorfism. Să se arate că G are un număr impar de elemente.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7