CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009
Filiera tehnologică : profil tehnic
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII A

Subiectul I

a) Justifică $f(x) \geq 0 (\forall) x \in [1,2]$. ……………………………………………………..1p

Justifică $f(x) \leq \frac{1}{3} (\forall) x \in [1,2]$ …………………………………………………...2p

b) Obține $0 \leq f^n(x) \leq \frac{1}{3^n}$. ………………………………………………………2p

Integrând, obținem $0 \leq \int_1^2 f^n(x)dx \leq \frac{1}{3^n}$. ……………………………………...1p

Finalizare: limita cerută este egală cu 0. ……………………………………………...1p

Subiectul II

a) Verifică axiomele grupului. ……………………...…………………….....4x1p=4p

b) Aduce la forma $(x-3)(y-3)=0$. ………………………………………………1p

Obține (x,y)$\in \{(3,b);(a,3) / a,b \in \mathbb{Z}\}$. ……….…………………………………..2p

Subiectul III

a) De exemplu $z = 1+\sqrt{2} \in M$, deci $M \neq \varnothing$. ……………………………………..2p

b) Pentru $z = a+b\sqrt{2}; a,b \in \mathbb{Z}, a^2-2b^2=-1$, calculează $z^3 = A+B\sqrt{2}$. ……………....2p

Verifică relația $A^2-2B^2=-1$. ……………………………………………………1p

c) Conform punctului anterior $\{z^{3^k} \mid z=1+\sqrt{2}, k \in \mathbb{N}\} \subset M$, deci M este infinită. …….2p

Subiectul IV

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c. \text{ ……………………………………………………1p}$$

$$\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{\frac{k}{m}}^{\frac{m}{k}} = \ln\frac{m\left(m+\sqrt{k^2+m^2}\right)}{k\left(k+\sqrt{k^2+m^2}\right)}. \text{ ……………………………2p}$$

Din ipoteză rezultă că: $\frac{m\left(m+\sqrt{k^2+m^2}\right)}{k\left(k+\sqrt{k^2+m^2}\right)} = \frac{m-1}{k-1}$, de unde $mk = m+k+\sqrt{m^2+k^2}$ **(1)**...2p

Cum mk, m, k sunt numere naturale nenule trebuie ca $\sqrt{k^2+m^2} \in \mathbb{N}^*$, deci k^2+m^2 este pătrat perfect. Aşadar $k^2+m^2 = p^2, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. …………………………………….......1p

Cel mai mic triplet cu aceasta proprietate este (k,m,p)=(3,4,5) iar k=3 şi m=4 verifică egalitatea **(1)**. ……………………………………………………………………1p