CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA a X-a

I. Fie parametrul real λ şi familia de drepte: $d_\lambda : (\lambda-1)x-(\lambda+1)y+2\lambda-1=0$.

a) Arătați că există o dreaptă în familie perpendiculară pe dreapta $d: 2x-y+1=0$.

b) Găsiți coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele d_0 şi d_3.

c) Arătați că toate dreptele trec printr-un punct fix.

II. a) Pentru $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, arătați că $(1+\sin x)^{2009}+(1-\sin x)^{2009}\le 2^{2009}$ utilizând, eventual, formula binomului lui Newton.

b) Verificați relația $2009!\cdot C_{n+2009}^{n}=(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+2009)$ şi deduceți că produsul a 2009 numere întregi consecutive se divide cu 2009!**.**

III. Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3=1$ iar $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, o funcție cu proprietatea:

$$f(x)+f(\varepsilon x)=4-\varepsilon x;\ (\forall)x\in\mathbb{C}$$

a) Verificați că $\varepsilon^{2009}+(1+\varepsilon)^{2006}+1=0$.

b) Verificați că $f(x)+f(\varepsilon^2 x)=4-x;(\forall)x\in\mathbb{C}$.

c) Găsiți funcțiile ce verifică relația dată .

IV Considerăm *n* atleți care participă la o cursă şi α_n numărul posibilităților de a se întocmi clasamentul final (ştiind că toți participanții termină cursa).

a) Determinați α_3 si α_4.

b) Determinați relația ce permite aflarea valorii numărului α_{10}.

Nota: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.