CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI-A

I. a) Arătați că pentru matricea $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ este adevărată relația :

$$A^2=(x+t)A-(\det A)\cdot I_2 \text{ ,unde } I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Dacă $A\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3=O_2$,să se arate că $A^2=O_2$.

II. a) Să se dea un exemplu de două matrice $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea $A\cdot B\neq B\cdot A$.

b) Să se determine toate matricele $A\in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că:

$$A\cdot B=B\cdot A,(\forall)B\in M_2(\mathbb{R}).$$

III. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine numărul soluțiilor ecuației $f(x)=m;\ m\in\mathbb{R}^*$.

IV. Fie (x_n) un şir definit astfel: $x_1\in\mathbb{R}$ şi $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{1-x_n},\forall n\geq 1$

a) Poate fi (x_n) convergent ? Justificați.

b) Calculând, eventual, primii termeni ai şirului, stabiliți ce valoare are termenul x_{2009} , dacă $x_1 = 2$.

Nota: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.