CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII-A

I. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Să se arate că: $0\le f(x)\le\dfrac{1}{3}, \forall x\in[1,2]$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2 f^n(x)dx$.

.

II. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție:

$$x*y=x+y-3 \text{ şi } x\circ y=xy-3x-3y+12,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}.$$

a) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z},*)$ este grup abelian.

b) Să se determine toate elementele $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ y=3$.

III. Fie mulțimea $M=\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in\mathbb{Z}$ şi $a^2-2b^2=-1\}$.

a) Să se arate că $M\ne\varnothing$.

b) Arătați că dacă $z\in M$ atunci şi $z^3\in M$.

c) Să se demonstreze că mulțimea M conține cel puțin 2009 elemente.

IV. Determinați o pereche de numere $(m,k)\in\left(\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\right)\times\left(\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\right)$, $m>k$, astfel încât:

$$\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{m}{k}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\frac{m-1}{k-1}.$$

Nota: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.