CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.

a) Determinați coordonatele punctelor in care graficul taie axa Ox.

b) Determinați coordonatele vârfului parabolei (P) asociate funcției .

c) Notând cu *S* aria mulțimii din plan delimitate de parabola (P) şi axa Ox, arătați că: $8<S<16$.

Soluție.

a) intersecțiile graficului (parabolei) cu axa Ox sunt punctele O(0, 0) şi A(4, 0) 2p

b) se obține imediat că vârful parabolei este V(2, 4). 1p

c) Evident $S>A_{[OVA]}\Leftrightarrow S>8$ *(1)* 2p

Utilizează S < Aria dreptunghiului cu doua dintre laturi OA si OP unde $VP\perp OY$, deci S<16. *(2)*

Din (1) şi (2) se deduce concluzia. 2p

2. **a)** Determinați cel mai mare număr întreg k pentru care $2x^2-3x+1\ge k$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) Găsiți numerele întregi *x* pentru care $\left(2x^2-3x+1\right)^2\le 14x^2-21x+1$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

a) Valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-3x+1$ este $y_{min}=\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)=-\frac{1}{8}$,

deci $f(x)\ge-\frac{1}{8},\forall x\in\mathbb{R}$ 2p

Astfel numărul cerut este k = -1 .... 2p

Metoda a II a: $2x^2-3x+1-k\ge0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ impune $\Delta'=1+8k\le0\Rightarrow k\le-\frac{1}{8}$, deci $k_{max}=-1$

b) Notăm $y=2x^2-3x+1$ şi inecuația dată conduce la: $y^2\le7y-6\Rightarrow y^2-7y+6\le0$

$\Rightarrow y\in[1,6]$ ………………………………………………………………………… 1p

Ajungem la:

(I) $y=2x^2-3x+1\ge1\Rightarrow x\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{3}{2},\infty\right)=S_1$

(II) $y=2x^2-3x+1\le6\Rightarrow x\in\left[-1,\frac{5}{2}\right]=S_2$ 1p

În final obținem $x\in S_1\cup S_2=[-1,0]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$; cum $x\in\mathbb{Z}$, ajungem la $x\in\{-1,0,2\}$. 1p

Pentru desfacerea corecta a parantezelor, fără finalizare, se acorda un punct.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Nicu are plantați în livadă n pruni, numerotați distinct cu numerele 1, 2, 3, …, n . Într-o zi, Nicu se apucă de cules prune respectând următoarea regulă: din prunul cu numărul 1 culege două prune, din prunul cu numărul 2, culege cinci prune, din prunul cu numărul 3, opt prune, şi aşa mai departe, culegând cu trei prune mai mult decât din pomul precedent.
a) Ce număr de prune a cules din copacul cu numărul zece?
b) Câți pruni ar trebui să aibă plantați Nicu pentru a fi sigur că, respectând regula indicată, la sfârşitul zilei are culese cel puțin 2010 prune ?

Soluție:
a) Notăm numărul de prune culese din pomul cu numărul n cu x_n şi, observând că $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $x_1 = 2$ şi rația $r = 3$, deducem imediat că $x_n = 3n - 1$
Atunci $x_{10} = 29$ 3p
b) Obținem imediat că suma prunelor culese este $S_n = \dfrac{(2+3n-1)n}{2} = \dfrac{(3n+1)n}{2}$ 1p
Din condiția $\dfrac{(3n+1)n}{2} \geq 2010$ ajungem la $n(3n+1) \geq 4020$. 1p
Încercări imediate conduc la: $36\cdot(3\cdot 36+1) = 36\cdot 109 = 3924 < 4020$ şi
$37\cdot(3\cdot 37+1) = 37\cdot 112 = 4144 > 4020$ şi astfel deducem $n \geq 37$,
adică Nicu ar trebui să aibă cel puțin 37 de pruni. 2p

4. Pe fiecare dintre laturile (AB), (BC) şi (CA) ale unui triunghi ABC se consideră câte trei puncte, două colorate cu roşu şi unul cu albastru.
a) Calculați câte triunghiuri au vârfurile printre cele nouă considerate.
b) Determinați câte dintre acestea au vârfurile colorate cu aceeaşi culoare.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:
a) deosebim două cazuri:
(1) triunghiurile au câte un vârf pe fiecare latură; cu principiul produsului avem că în acest caz sunt $3\cdot 3\cdot 3 = 27$ de triunghiuri; 1p
(2) două vârfuri sunt pe o latură şi al treilea vârf este pe una din celelalte două laturi; avem în acest caz: $3\cdot 3\cdot 6 = 54$ de triunghiuri 1p
În total avem $27 + 54 = 81$ de triunghiuri. 1p
b)
Dacă luăm două vârfuri roşii pe o latură, avem12 triunghiuri cu vârfurile roşii 2p
Dacă luăm câte un vârf roşu de pe fiecare latură, mai avem încă 8 triunghiuri 1p
La acestea se adaugă şi un triunghi cu vârfurile albastre, aşadar avem 21 de triunghiuri cu vârfurile de aceeaşi culoare. 1p