CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 - 2\cos t \cdot z + 1 = 0$, $t \in [0, 2\pi)$.

b) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ calculați $z^4 + \frac{1}{z^4}$ si $z^8 + \frac{1}{z^8}$.

c) Calculați $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}}$ ştiind că $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.

Soluție:

a) Obține $z_1 = \cos t + i \cdot \sin t; z_2 = \cos t - i \cdot \sin t$ 2p

b)Obține $z^2 + \frac{1}{z^2} = 0$ 1p

si $z^4 + \frac{1}{z^4} = -2$ 1p

Obține $z^8 + \frac{1}{z^8} = 2$ 2p

c) Obține $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}} = 2$ 1p

2. **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7}$ utilizând, eventual, formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

b) Găsiți n şi termenul care conține pe x^{-1} din dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că suma coeficienților primilor trei termeni este 36.

Soluție:

a) Ridicând în ambii membri la puterea a treia obținem :

$3 \cdot 3^x - 9 + 3\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)}(\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2}) =$

$= 3 \cdot 3^x - 9 + 3\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)}(\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7})$ 1p

de unde obținem : $(\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2})\left(\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)} - \sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)}\right) = 0$. 1p

Aşadar analizăm cazurile: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} = -\sqrt[3]{3^x - 2} \Leftrightarrow x = 1$.

sau $\left(\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)} - \sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)}\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. 1p

b) Din relația $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 = 36$ obținem $n^2 - 3n - 70 = 0 \Rightarrow n = 10$. 2p

În dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ termenul căutat este $T_7 = -C_{10}^7 x^{-1}$. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele A(3, 0), B(0, 2), M (3, -3) şi N(-2, 2).

a) Găsiți ecuația dreptei MB.

b) Arătați că AN, BM şi perpendiculara din O pe AB sunt concurente.

Soluție.

a) Scrie ecuația dreptei $MB: \frac{y-y_M}{y_B-y_M}=\frac{x-x_M}{x_B-x_M}$ 1p

Finalizare : $MB: 5x+3y-6=0$. 2p

b) Obține ecuația dreptei $AN: 2x+5y-6=0$ 1p

Obține coordonatele punctului de intersecție dintre AN si MB: $P\left(\frac{12}{19},\frac{18}{19}\right)$. 1p

Deoarece $m_{OP}=\frac{3}{2}; m_{AB}=-\frac{2}{3}$ deducem $OP\perp AB \Leftrightarrow m_{OP}\cdot m_{AB}=-1$. …………………….. 2p

4. Dintr-o urnă care conține mai mult de 10 bile ,colorate în verde sau roşu, un elev extrage bile până când constată că ,pentru prima dată, numărul de bile verzi extrase este egal cu numărul de bile roşii extrase. Elevul constată că acest lucru este îndeplinit după a zecea bilă extrasă şi că nu există trei bile de aceeaşi culoare extrase consecutiv.

Demonstrați că :

a) Dacă ultima bilă extrasă este verde, atunci şi penultima este tot verde, iar antipenultima este roşie.

b) A cincea şi a şasea bilă extrase au culori diferite.

Soluție:

a) S-au extras 5 bile verzi şi 5 bile rosii. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, \underset{\text{verde}}{B_7}, \underset{\text{rosie}}{B_8}, \underset{\text{verde}}{B_9}, \underset{\text{verde}}{B_{10}}$

Dacă ultima bilă extrasă este verde a noua este tot verde ,deoarece în caz contrar extragerea s-ar fi oprit după 8 bile extrase 2p

A opta bilă extrasă este roşie, deoarece în caz contrar ,ultimele 3 bile ar avea aceeaşi culoare, în contradicție cu ipoteza 2p

A şaptea bilă extrasă este verde, pentru că altfel extragerea s-ar fi oprit după doar 6 bile extrase 1p

b) Dacă B_5 si B_6 sunt verzi s-ar obține trei bile extrase consecutive, de aceeaşi culoare.

Dacă B_5 si B_6 sunt roşii, atunci extragerea s-ar fi oprit după patru bile extrase, contradicție.

Aşadar B_5 si B_6 au culori diferite. 2p