CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Fie G= $\left\{ M \in M_3(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $\forall M_1, M_2 \in G$, rezultă că $M_1 \bullet M_2 \in G$.

b) Să se determine o matrice $F \in G$ cu proprietatea ca $M \bullet F = F \bullet M = F$, $\forall M \in G$.

c) Să se determine o matrice $E \in G$ astfel încât $M \bullet E = E \bullet M = M$, $\forall M \in G$

Soluție:

a) demonstrează cerința în cazul general 3p

- dacă alege 2 matrici din M şi face înmulțirea corectă observând apartenența la G, primeşte 1p

b) observă că F se obține pentru x=0 .... 2p

c) determină E ca fiind M pentru x=1/2 şi face verificările.. 3p

2. Fie $f : \left[0, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in [0,1] \\ x^2 - 2x + 2, x \in \left(1, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$

a) Arătați că f e continua pe $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

b) Calculați o primitivă pentru funcția f.

c) Să se calculeze volumul "clopotului" format prin rotirea graficului funcției f în jurul lui Ox.

Soluție:

a) calculeaza limitele laterale si f(1).. 1p
observă că cele 3 valori sunt egale 1p
justifică faptul că f e continuă pe întreg intervalul 1p

b) calculează primitiva primei ramuri 1p
calculează primitiva ramurii a doua.. 1p
"leagă" constantele între ele (finalizare) 1p

c) aplică formula pe ramuri şi adună cele două volume.. 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Fie polinomul $P = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că pentru a = -4, polinomul de mai sus are toate rădăcinile reale.

b) Să se descompună P în factori ireductibili (in $\mathbb{R}[X]$) pentru a = 1.

Soluție:

a) observă că avem o ecuație bipătrată şi face notația $y = x^2$ 1p

calculează y_1, y_2 .... 2p

extrage radicalii şi finalizează.. 1p

b) realizează descompunerea $(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)$ 2p

justifica ireductibilitatea 1p

4. Fie $f : [0, \pi] \to [0,1]$, $f(x) = \sin x$.

a) Să se demonstreze că f este concavă.

b) Să se demonstreze că lungimea graficului lui f este mai mare decât $\sqrt{\pi^2 + 4}$.

Soluție:

a) calculează derivata doua 2p

observă că e derivata a doua este negativă 1p

Dacă justifică concavitatea grafic primeşte 2p (pe un grafic desenat corect)

b) alege "vârful" graficului şi observă pe desen (sau folosind concavitatea) că o coardă e sub grafic 2p

aplică teorema Pitagora şi obține concluzia 2p