

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A X A

1.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 - 2 \cos t \cdot z + 1 = 0$, $t \in [0, 2\pi)$.

b) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ calculați $z^4 + \frac{1}{z^4}$ și $z^8 + \frac{1}{z^8}$.

c) Calculați $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}}$ știind că $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.

2.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7}$ utilizând, eventual, formula $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

b) Găsiți n și termenul care conține pe x^{-1} din dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ știind că suma coeficienților primilor trei termeni este 36.

3. Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(0, 2)$, $M(3, -3)$ și $N(-2, 2)$.

a) Găsiți ecuația dreptei MB .

b) Arătați că AN , BM și perpendiculara din O pe AB sunt concurente.

4. Dintr-o urnă care conține mai mult de 10 bile ,colorate în verde sau roșu, un elev extrage bile până când constată că ,pentru prima dată, numărul de bile verzi extrase este egal cu numărul de bile roșii extrase. Elevul constată că acest lucru este îndeplinit după a zecea bilă extrasă și că nu există trei bile de aceeași culoare extrase consecutiv.

Demonstrați că :

a) Dacă ultima bilă extrasă este verde, atunci și penultima este tot verde, iar antipenultima este roșie.

b) A cincea și a șasea bilă extrase au culori diferite.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7