CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII A

1. Fie G=$\left\{ M \in M_3(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $\forall M_1, M_2 \in G$, rezultă că $M_1 \bullet M_2 \in G$.

b) Să se determine o matrice $F \in G$ cu proprietatea ca $M \bullet F = F \bullet M = F$, $\forall M \in G$.

c) Să se determine o matrice $E \in G$ astfel încât $M \bullet E = E \bullet M = M$, $\forall M \in G$

2. Fie $f : \left[0, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in [0,1] \\ x^2 - 2x + 2, x \in \left(1, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$

a) Arătați că f e continua pe $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

b) Calculați o primitivă pentru funcția f.

c) Să se calculeze volumul “clopotului” format prin rotirea graficului funcției f în jurul lui Ox.

3. Fie polinomul $P = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că pentru a = -4, polinomul de mai sus are toate rădăcinile reale.

b) Să se descompună P in factori ireductibili (in $\mathbb{R}[X]$) pentru a = 1.

4. Fie $f : [0, \pi] \to [0,1]$, $f(x) = \sin x$.

a) Să se demonstreze ca f este concava.

b) Să se demonstreze ca lungimea graficului lui f este mai mare decât $\sqrt{\pi^2 + 4}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7