CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

Subiectul 1.
Un elev a început să citească o carte pe 1 martie. În fiecare zi el citeşte acelaşi număr de pagini şi termină de citit cartea pe 31 martie. Dacă în prima zi el ar fi citit de 4 ori mai puține pagini şi în fiecare zi următoare cate o pagină mai mult decat în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 martie. Cate pagini are cartea?

Soluție:
Fie x numărul de pagini citite în fiecare zi

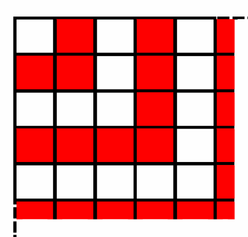
Avem $31x=\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+2\right)+...+\left(\frac{x}{4}+30\right)$ ………………………………..……………………..2p

$31\cdot x=31\cdot\frac{x}{4}+(1+2+...+30)$ ……………………………………………………………………2p

$\frac{3}{4}\cdot 31\cdot x=\frac{31\cdot 30}{2}$ ………………………………………………………………………………….2p

Cartea are $31\cdot 20=620$ pagini ……………………………………………………………………..1p

Subiectul 2.
Într-o cameră există un perete de formă pătrată cu latura $5m$, care trebuie acoperit cu plăci de faianță de culoare albă sau roşie . Plăcile de faianță sunt tot de formă pătrată cu latura de $20cm$.
a) Să se demonstreze că oricum am pune faianță pe perete, numărul plăcilor roşii folosite şi numărul plăcilor albe folosite nu poate fi egal;
b) Să se determine numărul de plăci din fiecare culoare care este folosit pentru a realiza un model ca şi cel alăturat.



Monea Mihai şi Steluța – Deva

Soluție:
a)Aria unei plăci de faianță este $400cm^2$, iar a peretelui $25m^2$, deci sunt necesare 625 de plăci, care fiind număr impar nu se poate împărți în părți egale……………………………………………...…....4p
b)Observăm că numărul plăcilor albe este $1+5+9+..$, adică suma unor termeni în progresie aritmetică cu rația 4. Pe o latură a peretelui încap 25 plăci, deci 13 albe şi 12 roşii. Deci suma de mai sus are 13 termeni , deci va fi $1+5+9+...+49=325$. Prin urmare vor fi 325 plăci albe şi 300 roşii……………………………………………………………………………………….................3p

Subiectul 3.
Fie $a\in(0,\infty)$ şi ecuația $x^2+ax+a^2-6=0$.

a) Determinați valorile parametrului real **a** pentru care ecuația are rădăcini reale;
b) Dacă $a^3=6(a+1)$ demonstrați că ecuația nu are rădăcini reale.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

Soluție:

a)Ecuația are rădăcini reale dacă $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4\left(a^2 - 6\right) \geq 0 \Leftrightarrow 3\left(8 - a^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 2\sqrt{2}$ ……………..4p

b)Dacă ecuația ar avea rădăcini reale $\Rightarrow a \leq 2\sqrt{2}$

Dar $6 = a\left(a^2 - 6\right) \leq 2\sqrt{2}(8-6) = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} < 6$ (Fals)…………………………………………...3p

Subiectul 4.

În paralelogramul ABCD, punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, N este mijlocul laturii $[CD]$, $[AN] \cap [BD] = \{E\}$, şi $[AM] \cap [BD] = \{F\}$. Dacă $\frac{AE}{EN} = l$ şi $\frac{DE}{EB} = k$ atunci:

a) exprimați $\overrightarrow{AE}$ in funcție de $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ şi k ;
b) exprimați $\overrightarrow{AE}$ in funcție de $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ şi l ;
c) arătați că $l = 2$ şi $k = \frac{1}{2}$;
d) demonstrați ca $[DE] \equiv [EF] \equiv [FB]$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$ ……………………………………………………………………..1p

b) $\overrightarrow{AE} = \frac{l}{l+1}\overrightarrow{AN} = \frac{l}{l+1} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{l}{2l+2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{l}{2l+2}\left(2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)$ ………...……….1p

c)Din punctele a) şi b) obținem $\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB} = \frac{l}{2l+2}\left(2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)$ ……………………………1p

Deoarece $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ necoliniari $\Rightarrow \frac{2l}{2l+2} = \frac{1}{1+k}$ şi $\frac{l}{2l+2} = \frac{k}{1+k}$ ………………………………………1p

Obținem $l = 2$ şi $k = \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………..…………1p

d) $\frac{DE}{EB} = k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = \frac{DB}{3}$ ……………………………………………………………..1p

Analog $BF = \frac{DB}{3} \Rightarrow [DE] \equiv [EF] \equiv [FB]$ ………………………………………………………………1p