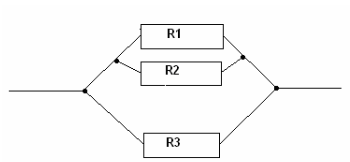
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

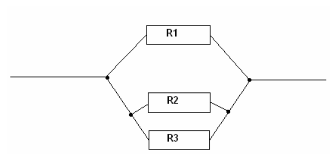
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

Subiectul I

Într-un circuit electric sunt legate în paralel două rezistoare cu rezistențele R_1 și R_2. Rezistența echivalentă grupării celor două rezistoare este dată de relația $R_1 \circ R_2 = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Să se arate că circuitele din figurile de mai jos au aceeaşi rezistență totală





Rezolvare

Rezistența totală asociată primei figuri este $R'=\left(R_1 \circ R_2\right) \circ R_3 = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} \circ R_3 = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$ **3p**

Rezistența totală asociate celei de a doua figuri este

$R''=R_1 \circ \left(R_2 \circ R_3\right) = R_1 \circ \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3} = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$ **3p**

Finalizare: cele două circuite au aceeaşi rezistență **1p**

Subiectul II

Se dau numerele reale a,b,c, funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = x^3 + 2x+3$ şi determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad B= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f\left(a\right) & f\left(b\right) & f\left(c\right) \end{vmatrix}.$$

a) Să se arate că $A=\left(a-b\right)\cdot\left(b-c\right)\cdot\left(c-a\right)\cdot\left(a+b+c\right)$;

b) $A=B$;

c) Să se arate că pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate numere naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

Rezolvare

a) Făcând operații cu linii şi coloane putem obține de exemplu

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b\text{-}a & c\text{-}a\\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}=(b\text{-}a)\cdot(c\text{-}a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2\end{vmatrix}=$$

$=(b\text{-}a)(c\text{-}a)(c\text{-}b)(a+b+c)$ **2p**

b) $B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3+2a+3 & b^3+2b+3 & c^3+2c+3\end{vmatrix}=A+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 2a & 2b & 2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=A$ **2p**

c) Fie $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, $C(c,f(c))$, trei puncte de pe graficul funcției f.

Atunci $A_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\\ c & f(c) & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|A|=\frac{1}{2}\left|(a\text{-}b)(b\text{-}c)(c\text{-}a)(a+b+c)\right|$ **1p**

Dacă două dintre numerele a,b,c dau acelaşi rest la împărțirea cu 3 atunci

$(a\text{-}b)(b\text{-}c)(c\text{-}a)\,\vdots\,3$ **0,5p**

Dacă a,b,c dau resturi diferite la împărțirea la 3 atunci $a+b+c\,\vdots\,3$ **0,5p**

De asemenea $(a\text{-}b)(b\text{-}c)(c\text{-}a)\,\vdots\,2$ **1p**

Subiectul III

Cătălin şi Lucian îşi trimit mesaje codificate.Ei procedează în felul următor:

- au atribuit literelor alfabetului, excluzând diactriticele, numere consecutive, repetând fiecare număr şi alternând semnele + şi – astfel:
  A B C D E F.........
  1 -1 2 -2 3 -3.........
- au transformat mesajul într-un şir de numere (în care 0 semnifică spațiu liber dintre două cuvinte) şi aranjează şirul într-o matrice X cu trei linii;
- au folosit matricea $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ pe post de „cheie” de codificare şi au obținut matricea $T=C\cdot X$;
- mesajul transmis este şirul de elemente din matricea T (citite pe linii)

Într-una din zile Cătălin i-a transmis lui Lucian mesajul următor:

-11	-7	16	8	11	-1	1	3	10

Decodificați-l.

Rezolvare.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera teoretică, profil umanist

Aranjăm mesajul într-o matrice cu 3 linii $T=\begin{pmatrix} -11 & -7 & 16 \\ 8 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ **1p**

$CX=T \Rightarrow X=C^{-1}T$ **1p**

Calculăm inversa matricei C şi obținem $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **2p**

$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -7 & 16 \\ 8 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & -11 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **2p**

Transpunem mesajul în litere şi obținem HAIMOVICI...**1p**

Subiectul IV

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se arate că dacă G îndeplineşte una din condițiile:

a) $(xy)^2 = x^2y^2,\ \forall\ x,y \in G$

b) $x^3=e,\ \forall x \in G,\ (xy)^2=(yx)^2,\ \forall x,y \in G$

atunci G este comutativ

Rezolvare.

a) $(xy)^2=x^2y^2 \Leftrightarrow x(yx)y=xxyy \Leftrightarrow yx=xy$ **2p**

b) $xy=(xy)^4=(xy)^2\cdot(xy)^2=(yx)^2\cdot(yx)^2=(yx)^4=yx$ **5p**