CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Se consideră ecuațiile $x^2+2bx+2c=0$ şi $x^2+2cx+2b=0$, unde b şi c sunt numere reale pozitive.
a) Dacă numerele b şi c sunt distincte demonstrați că ecuațiile au o rădăcină reală comună.
b) Dacă produsul celor patru numere reale care reprezintă rădăcinile celor două ecuații este 16, să se afle b şi c.

Soluție:
a) Daca t este rădăcină reală comună atunci $t^2+2bt+2c=0; t^2+2ct+2b=0$ **1p**
Obține $t(2b-2c)=2b-2c \Rightarrow t=1$ rădăcină reală comună .... **1 p**
b) Notând cu x_1, x_2 respectiv x_3, x_4 rădăcinile celor două ecuații putem scrie $x_1 \cdot x_2 = 2c; x_3 \cdot x_4 = 2b$
şi $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16 \Leftrightarrow b \cdot c = 4$ **(1)** **2p**
Din condiția ca ecuațiile să aibă rădăcini reale ($\Delta_1 \geq 0; \Delta_2 \geq 0$) rezultă $b^2 \geq 2c; c^2 \geq 2b$ **(2)** **1p**
Din relațiile **(1)** si **(2)** deducem $b \geq 2; c \geq 2$,care împreună cu relația (**1**) conduce la b = c = 2 ..... **1p**
Se verifică existența rădăcinilor cu produsul 16 pentru valorile găsite **......................................** **1p**

2. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = 2x^2 + a \cdot x - 1$, a$\in R$
a) Găsiți a $\in R$ dacă funcția f este funcție pară.
b) Pentru a = 0 verificați că punctele $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right), N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right)$ sunt situate pe graficul funcției şi demonstrați că aria suprafeței delimitată de graficul funcției f şi axa (Ox) este mai mare decât $\frac{5}{4\sqrt{2}}$
c) Pentru a = 0 demonstrați că $(f \circ f)(\cos(u)) = \cos(4u), (f \circ f \circ f)(\cos(u)) = \cos(8u)$, pentru orice număr real u.

Soluție:
a) Din condiția $f(-x) = f(x)$ pentru orice x-real deducem a=0 .... **1p**
b) Notând cu $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ punctele de intersecție cu axa (Ox) ale graficului funcției şi cu $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right), N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}\right)$ punctele simetrice față de axa (*Oy)* situate pe graficul funcției atunci aria cerută este mai mare decât suma dintre aria trapezului isoscel ***ABNM*** si aria triunghiului ***VMN***, unde ***V(0,-1)*** este vârful parabolei **1p**
Obține $A_{ABNM} = \frac{9}{8\sqrt{2}}; A_{VMN} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ **1p**
Finalizare : Aria cerută este mai mare decât suma $\frac{9}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$ **1p**

c) Obține $f(\cos u) = 2\cos^2 u - 1 = \cos(2u)$ **1p**

$(f \circ f)(\cos u) = f(\cos 2u) = 2\cos^2 2u - 1 = \cos(4u)$ **1p**

$(f \circ f \circ f)(\cos u) = (f \circ f)(\cos 2u) = 2\cos^2 4u - 1 = \cos(8u)$ **1p**

3. Se consideră vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ şi numărul real $t \in [0,1]$

a) Demonstrați că $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| + |t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ pentru orice $t \in [0,1]$.

b) În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in [BC]$ astfel încât BM = CN. Notăm $\frac{MC}{BM} = \frac{BN}{CN} = \frac{1}{k}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ şi ,apoi utilizând inegalitatea de la punctul ***(a)*** demonstrați că $AM + AN \le AB + AC$

Soluție:

a) Utilizăm inegalitatea triunghiulară $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$. Astfel $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| \le t|\vec{u}| + (1-t)|\vec{v}|$

şi $|t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \le t|\vec{v}| + (1-t)|\vec{u}|$ **2p**

Adunând inegalitățile anterioare obținem $|t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v}| + |t \cdot \vec{v} + (1-t) \cdot \vec{u}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ **1p**

b) Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ ..... …………………………….. **2p**

Utilizând inegalitatea de la punctul (a) obținem :

$AM + AN = \left|\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}\right| + \left|\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}\right| \le AB + AC$ **2p**

4. O firmă ,afectată de criză ,urmează a renunța la unul din cele trei schimburi (S_1, S_2, S_3) în care se desfăşoară activitatea pentru a se încadra în bugetul fixat **B**. In urma analizării costurilor de producție *compartimentul organizare* afirmă că bugetul **B** ajunge pentru funcționarea S_1, S_2 timp de 12 luni sau pentru funcționarea S_1, S_3 timp de 9 luni sau pentru funcționarea S_2, S_3 timp de 4 luni. Justificați că analiza făcută este greşită .

Soluție:

Notam cu c_1, c_2, c_3 cheltuielile lunare ale fiecăruia dintre schimburile S_1, S_2, S_3

Conform enunțului putem scrie :

$12(c_1 + c_2) =$ B

$9(c_1 + c_3) =$ B

$4(c_3 + c_2) =$ B **3p**

Adunând relațiile anterioare obținem: $c_1 + c_2 + c_3 = \frac{2B}{9}$ **2p**

Din relațiile anterioare obținem $c_1 = -\frac{B}{36}$, astfel că analiza este eronată **2p**