CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Raluca a cumpărat pentru colecția sa 4 noi timbre, câte unul din Anglia, Franța, Italia şi Grecia. Fără cel din Anglia ea ar fi plătit 4 lei,fără cel din Franța ea ar fi plătit 4,5 lei, fără cel din Italia ea ar fi plătit 4,4 lei ,iar prețul timbrelor fără cel din Grecia este de 2,7 lei. Cât a costat fiecare dintre cele 4 timbre?

Solutie :

Notăm cu a,b,c respectiv d prețul timbrului din Anglia,Franța ,Italia respectiv Grecia …………..1p

Atunci putem scrie :

$$\begin{cases} b+c+d=4 \\ a+c+d=4,5 \\ a+b+d=4,4 \\ a+b+c=2,7 \end{cases}$$ ……………………………………......…………2p

Adunând 3(a+b+c+d)=15,6 de unde a+b+c+d=5,2 ……………………………………………...2p

Folosind această relație şi ecuațiile sistemului obținem:

a=1,2 lei (Anglia)

b=0,7 lei (Franta)

c=0,8 lei (Italia)

d=2,5 lei (Grecia) ……………………………………………………….……..2p

2. a) Demonstrați că $4x-x^2 \le 4, \forall x \in R$.

b) Demonstrați că ecuația $\frac{\left(2011^x+1\right)^2}{2011^x}=\left(4x-x^2\right)$ nu are soluții reale.

c) Determinați numerele reale x şi y, astfel încât $y^2-4y+8=4\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2^2\left(x^2+1\right)$.

Soluție:

a) $4x-x^2 \le 4 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 \ge 0, \forall x \in R$ **1p**

b) $\frac{\left(2011^x+1\right)^2}{2011^x}=4x-x^2 \le 4$ **1p**

$\left(2011^x-1\right)^2 \le 0 \Rightarrow x=0$ care nu verifică ecuația **1p**

c) $y^2-4y+8=4\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2^2\left(x^2+1\right) \le 4$ **1p**

$\Rightarrow \left(y-2\right)^2 \le 0$, deci y = 2 .... **1p**

Obținem $\left(\log_2\left(x^2+1\right)-2\right)^2=0$ **1p**

Găsim $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ **1p**

3. a) Demonstrați că $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall x, y > 0$ iar $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma > 0$

b) Fie a, b, c > 1 şi x >0. Demonstrați echivalența: $a^x = bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}$.

c) Dacă există a, b ,c >1 şi x, y, z >0 care verifică simultan relațiile:

$a^x = bc,\ b^y = ca,\ c^z = ab$ demonstrați că: $\frac{x+y+z}{3} \geq 2\ si\ \sqrt[3]{xyz} \geq 2.$

Soluție:

a) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0, \forall x, y > 0$ **1p**

$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \gamma+\beta \geq 2\sqrt{\gamma\beta}, \alpha+\gamma \geq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ iar prin înmulțire rezultă cerința **1p**

b) $a^x = bc \Leftrightarrow \lg a^x = \lg bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}, \forall a, b, c > 0\, şi\ a \neq 1$ **1p**

c) $x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}, y = \frac{\lg c + \lg a}{\lg b}, z = \frac{\lg a + \lg b}{\lg c}$ **1p**

$x+y+z = \left(\frac{\lg a}{\lg b} + \frac{\lg b}{\lg a}\right) + \left(\frac{\lg b}{\lg c} + \frac{\lg c}{\lg b}\right) + \left(\frac{\lg c}{\lg a} + \frac{\lg a}{\lg c}\right) \geq 2+2+2 = 6$ **1p**

$\Rightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq 2$ **1p**

$\Rightarrow xyz \geq 8, deci\ \sqrt[3]{xyz} \geq 2$ **1p**

4. Fie expresia E(x) = $\sqrt{\frac{4-x}{4+x}} + a \cdot \sqrt{\frac{4+x}{4-x}},\ a \in R.$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care E(x) are sens.

b) Dacă a = 1, rezolvați ecuația E(x) = 2.

c) Determinați valorile lui a astfel încât ecuația E(x) = 2 să aibă soluții reale si apoi rezolvați ecuația .

Soluție:

a) $\frac{4-x}{4+x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$ **1p**

b) Notăm $\sqrt{\frac{4-x}{4+x}} = t$ **1p**

Ecuația devine $(t - 1)^2 = 0$, cu soluția t = 1 .... **1p**

Avem soluția x = 0 .... **1p**

c) Cu notația de la punctul b) ecuația este echivalentă cu ecuația $(t - 1)^2 = 1 - a$, care are soluție pentru $a \leq 1$.......... **1p**

Pentru $t = 1 + \sqrt{1-a}$, obținem x = $\frac{4a - 4 - 8\sqrt{1-a}}{3 - a + 2\sqrt{1-a}}$ **1p**

Şi pentru t = $1 - \sqrt{1-a}$, obținem x = $\frac{4a - 4 + 8\sqrt{1-a}}{3 - a - 2\sqrt{1-a}}$ **1p**