CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Fie $f: R^* \to M_3(R), f(x) = x \cdot A$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculați $f^2(x); f^3(x)$.

b) Determinați $f^{2011}(1)$.

c) Găsiti $x \in R^*$ astfel încât : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$, unde (2011) este matrice cu o linie şi o coloană.

<u>Soluție:</u>

a) $f^2(x) = x^2 A^2; f^3(x) = x^3 I_3$ unde

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………………………………3p

b) $f^{2011}(1) = A^{2011} = (A^3)^{670} \cdot A = A$ ………………………………………………………… 2p

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$ de unde x=2011 …………… 2p

2. O navetă spațială are traiectoria dată de legea y= $f(t) = \sqrt{\frac{t^2-4}{4}}$, unde t reprezintă timpul în secunde iar $f(t)$ reprezintă înălțimea in kilometri(de la momentul t = 0 până la t = 2 se consideră că are loc desprinderea de pe rampa de lansare deci înălțimea este considerată 0).

a) Să se determine înălțimea la care ajunge naveta după 4 secunde de la desprinderea de pe rampa de lansare.

b) Să se demonstreze că traiectoria este concavă

c) Să se determine asimptota traiectoriei.(considerând că timpul tinde spre infinit).

<u>Soluție:</u>

a) $f(6) = 2\sqrt{2}$ km …………………………………………………………………………………… **2p**

b) $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2-4}}, t > 2$ …………………………………………………………………………… **1p**

$f''(t) = \frac{-2}{(t^2-4)\sqrt{t^2-4}}, t > 2$ ……………………………………………………………………… **1p**

Derivata a doua este negativă deci traiectoria este concavă **1p**

c) $m=\frac{1}{2}$ **1p**

$n=0$ şi $y=\frac{1}{2}t$ e asimptota oblică **1p**

3. Fie M mulțimea tuturor matricilor de ordin 3 formate doar cu numerele 1, 3, 5,…,17(fiecare număr impar apare o singură dată intr-o matrice din M).

a) Să se dea un exemplu format din două matrici diferite din M dar care au acelaşi determinant.

b) Să se verifice dacă există o matrice A din M astfel încât $\det A=\det I_3$.

c) Să se determine numărul de matrici din M care au pe linia întâi elementele 1, 3 şi 5(nu neapărat in această ordine).

Soluție:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 7 & 9 & 11\\ 13 & 15 & 17\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}7 & 9 & 11\\ 13 & 15 & 17\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ **3p**

b) $\det A = par$, $\forall A\in M$ (suma a 6 numere impare) **1p**

$\det I_3=1$ **1p**

Două matrici egale ar avea determinanți egali şi deci nu există o astfel de matrice **1p**

c) Avem 6! · 6 matrici de acest fel **1p**

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$.

a) Să se demonstreze că că $f(\ln 2)>0$ (folosind eventual aproximarea $\ln 2\simeq 0,7$).

b) Să se demonstreze că $f(x)<0, \forall x<0$.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{e}>1,625$.

Soluție:

a) $f(\ln 2)=1-\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}$ **2p**

$f(\ln 2)>0,05>0$ **1p**

b) $f'(x)=e^x-1-x$ **1p**

$f''(x)=e^x-1$ **1p**

Folosind semnul derivatelor deduce concluzia **1p**

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{13}{8}$ şi din punctul (b) deducem concluzia **1p**