CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Fie M mulțimea tuturor grupurilor cu 4 elemente.

a) Să se dea exemplu de grup din M.

b) Să se demonstreze că există un grup $G \subset M$ astfel încât $G \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$.

c) Să se demonstreze că în M există măcar două grupuri neizomorfe.

Soluție:

a) De exemplu $G = \mathbb{Z}_4$ **3p**

b) $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ verifică condițiile **3p**

c) Grupul lui Klein şi $\mathbb{Z}_4$ nu sunt izomorfe.. **1p**

Observație: Orice alte exemple corecte vor fi punctate cu punctaj maxim

2. Fie funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\ln 2 > 0,66$.

Soluție:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2}{x+1} > 0, \forall x > 0$ deci f e strict crescătoare **2p**

$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$ **1p**

b) $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$ **2p**

$\int_0^1 f(x)dx = 2\ln 2 - \dfrac{4}{3}$ **1p**

c) Conform punctelor (a) şi (b) avem $\int_0^1 f(x)dx = 2\ln 2 - \dfrac{4}{3} > 0$ deci $\ln 2 > \dfrac{2}{3}$ **1p**

3. Fie $f, g : \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{13}, f(x) = x \cdot x, g(x) = x + x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{13}$.

a) Să se determine două elemente distincte a şi b din $\mathbb{Z}_{13}$ astfel încât $f(a) = f(b)$ şi $g(a) \neq g(b)$.

b) Să se demonstreze că funcția f nu e surjectivă iar funcția g este bijectivă.

Soluție:

a) $f(\widehat{12}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$ **2p**

$g(\widehat{12}) \neq g(\hat{1})$ **2p**

b) $f(x) \neq \hat{2}, \forall x \in \mathbb{Z}_{13}$, deci f nu e surjectivă **1p**
g e injectivă **1p**
Deducem că g e surjectivă datorită domeniului şi codomeniului finite şi de acelaşi cardinal sau cu ajutorul definiției **1p**

4. Fie mulțimea $P = \left\{ f : [0,1] \to [0,1] \mid f\ continua\ pe [0,1], f(0) = 0, f(1) = 1 \right\}$.

a) Să se demonstreze că în P avem măcar 2011 funcții.

b) Să se determine o funcție $f \in P$ cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că există un număr infinit de funcții din f astfel încât $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2011}$.

<u>Soluție:</u>

a) Funcțiile $f_n(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ aparțin mulțimii P **3p**

b) $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ **2p**

c) $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ **1p**

Pentru orice $n \geq 2011$ avem $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2011}$ ceea ce încheie demonstrația .