

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A X A

1. Raluca a cumpărat pentru colecția sa 4 noi timbre, câte unul din Anglia, Franța, Italia și Grecia. Fără cel din Anglia ea ar fi plătit 4 lei, fără cel din Franța ea ar fi plătit 4,5 lei, fără cel din Italia ea ar fi plătit 4,4 lei, iar prețul timbrelor fără cel din Grecia este de 2,7 lei. Cât a costat fiecare dintre cele 4 timbre?
2. a) Demonstrați că $4x - x^2 \leq 4, \forall x \in R$.
b) Demonstrați că ecuația $\frac{(2011^x + 1)^2}{2011^x} = (4x - x^2)$ nu are soluții reale.
c) Determinați numerele reale x și y , astfel încât $y^2 - 4y + 8 = 4\log_2(x^2 + 1) - \log_2^2(x^2 + 1)$.
3. a) Demonstrați că $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall x, y > 0$ iar $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma > 0$
b) Fie $a, b, c > 1$ și $x > 0$. Demonstrați echivalența: $a^x = bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}$.
c) Dacă există $a, b, c > 1$ și $x, y, z > 0$ care verifică simultan relațiile:
 $a^x = bc, b^y = ca, c^z = ab$ demonstrați că: $\frac{x+y+z}{3} \geq 2$ și $\sqrt[3]{xyz} \geq 2$.
4. Fie expresia $E(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} + a \cdot \sqrt{\frac{4+x}{4-x}}, a \in R$.
a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.
b) Dacă $a = 1$, rezolvați ecuația $E(x) = 2$.
c) Determinați valorile lui a astfel încât ecuația $E(x) = 2$ să aibă soluții reale și apoi rezolvați ecuația.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.