# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
**Filiera tehnologica : profil tehnic**

**CLASA A XII A**

**1.** Fie M mulțimea tuturor grupurilor cu 4 elemente.

a) Să se dea exemplu de grup din M.

b) Să se demonstreze că există un grup $G \subset M$ astfel încât $G \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$.

c) Să se demonstreze că în M există măcar două grupuri neizomorfe.

**2.** Fie funcția $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\ln 2 > 0,66$.

**3.** Fie $f, g : \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{13}, f(x) = x \bullet x, g(x) = x + x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{13}$.

a) Să se determine două elemente distincte a şi b din $\mathbb{Z}_{13}$ astfel încât $f(a) = f(b)$ şi $g(a) \neq g(b)$.

b) Să se demonstreze că funcția $f$ nu e surjectivă iar funcția $g$ este bijectivă.

**4.** Fie mulțimea $P = \{ f:[0,1] \to [0,1] \mid f \text{ continua pe} [0,1], f(0)=0, f(1)=1 \}$.

a) Să se demonstreze că în P avem măcar 2011 funcții.

b) Să se determine o funcție $f \in P$ cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că există un număr infinit de funcții din f astfel încât $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2011}$.

***Notă:*** *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*