CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. Raluca, Bogdan şi Andreea au, fiecare, câte un anumit număr de timbre. Câte timbre are fiecare dacă jumătatea numărului de timbre a Ralucăi, treimea numărului de timbre a lui Bogdan şi cincimea numărului de timbre a Andreei sunt, în această ordine, trei numere naturale consecutive a căror sumă este egală cu 48?

Soluție:

Raluca are n_1 timbre; Bogdan are n_2 timbre; Andreea are n_3 timbre 1p

$\frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{3}n_2 + \frac{1}{5}n_3 = 48$ 1p

$\frac{1}{2}n_1 = n;\ \frac{1}{3}n_2 = n+1;\ \frac{1}{5}n_3 = \mathrm{n}+2$ 2p

$n_1 = 2n; n_2 = 3(n+1); n_3 = 5(n+2)$ 1p

$n+(n+1)+(n+2) = 48 \Rightarrow n = 15$ 1p

Raluca are 30 timbre; Bogdan are 48 timbre; Andreea are 85 timbre 1p

2. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 - 5\,y = -4 \end{cases}$.

Soluție

Pune condițiile de existență $x, y \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$ 1p

Notează $\log_x y = \mathrm{t} \Rightarrow \mathrm{t} + \frac{1}{\mathrm{t}} = 2 \Rightarrow \mathrm{t} = 1 \Rightarrow \log_x y = 1 \Rightarrow x = y$ 3p

Din a doua ecuație obține $\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \{1; 4\}$ 2p

Deoarece $\mathrm{x} \neq 1 \Rightarrow \mathrm{x} = 4 \Rightarrow \mathrm{y} = 4$ 1p

3.

a) Din 7 ingineri şi 4 maiştri se aleg 5 persoane pentru a forma o echipă de intervenție. În câte moduri se poate alcătui această echipă, ştiind că în componența ei trebuie să intre cel puțin 2 maiştri?

b) Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$ în care x şi y au puteri egale, unde $x, y \in (0,+\infty)$.

Soluție

a) $C_4^2 \cdot C_7^3 + C_4^3 C_7^2 + C_4^4 C_7^1 = 6\cdot 35 + 4\cdot 21 + 1\cdot 7 = 301$ moduri 3p

b) $T_{k+1} = C_{21}^k \left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right)^{21-k}\left(\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^k$ 1p

$T_{k+1} = C_{21}^k x^{\frac{42-3k}{6}} \cdot y^{\frac{4k-21}{6}}$ 2p

$\frac{42-3k}{6} = \frac{4k-21}{6} \Leftrightarrow k = 9 \Rightarrow T_{10}$ 1p

4. Fie punctual M(3, 3) şi triunghiul ABC determinat de dreptele: AB: $x + 2y - 4 = 0$;
BC: $3x + y - 2 = 0$; CA: $x - 3y - 4 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctelor A, B şi C.

b) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

c) Fie P, Q, R proiecțiile punctului M pe dreptele OA, OB şi AB, unde O este originea reperului cartezian. Să se demonstreze că punctele P, Q, R sunt coliniare.

<u>**Soluție**</u>

a) $AB \cap AC = \{A\} \Rightarrow A(4,0),\ AB \cap BC = \{B\} \Rightarrow B(0,2),\ AC \cap BC = \{C\} \Rightarrow C(1,-1)$ 2p

b) $AB = \sqrt{20},\ AC = \sqrt{10},\ BC = \sqrt{10} \Rightarrow \Delta ABC$ - dreptunghic în $C \Rightarrow A_{ABC} = 5$ 2p

c)

<u>Metoda I</u>

$P(3,0),\ Q(0,3) \Rightarrow PQ: x + y - 3 = 0$ 1p

$PQ \cap AB = \{R\} \Rightarrow R(2,1)$ 1p

$m_{MR} = 2,\ m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{MR} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow MR \perp AB \Rightarrow$ P, Q, R coliniare 1p

<u>Metoda II</u>

$MR \perp AB \Rightarrow m_{MR} \cdot m_{AB} = -1$ şi cum $m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{MR} = 2$ 1p

$M(3,3),\ m_{MR} = 2 \Rightarrow MR: 2x - y - 3 = 0$ 1p

$AB \cap MR = \{R\} \Rightarrow R(2,1) \in PQ$ (coordonatele lui R verifică ecuația dreptei PQ)$\Rightarrow$P, Q, R coliniare
.... 1p