CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a IX-a

1. Se consideră funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - a$, $a \in (0, \infty)$.

1) Demonstraţi că soluţiile ecuaţiei $\left||f(x)|-2a\right| = 2a, a \in (0,\infty)$ sunt în progresie aritmetică.

2) Demonstraţi că dacă există u şi v diferite astfel încât $|f(u)-f(v)| \le 2$, atunci $|u-v| \le 1$.

3) Demonstraţi că dacă M este o mulţime cu 3 elemente astfel încât $M \subset [2010, 2012]$ atunci există cel puţin două elemente x şi y aparţinând mulţimii M astfel încât $|f(x)-f(y)| \le 2$

Soluţie:

1) Obţine soluţiile $x_1 = \frac{-3a}{2}, x_2 = \frac{a}{2}, x_3 = \frac{5a}{2}$ 2p

Verifică $x_1 + x_3 = 2x_2$ 1p

2) Obţine $|f(u)-f(v)| \le 2 \Leftrightarrow |2u-2v| \le 2 \Leftrightarrow |u-v| \le 1$ 2p

3) Mulţimea având 3 elemente într-un interval de lungime 2 rezultă, conform principiului cutiei, că există cel puţin două dintre ele într-un interval de lungime 1 .... 1p

Dacă x, y sunt elementele anterioare atunci $|x-y| \le 1 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| \le 2$ 1p

2. Avem la dispoziţie 2012 pătrate 3×3, împărţite fiecare în câte 9 „pătrăţele" 1×1 prin drepte paralele cu laturile pătratului iniţial şi notate $P_1, P_2, ..., P_{2012}$. În fiecare dintre pătratele iniţiale se completează pătrăţelele din colţuri şi apoi cel din centru, începând cu pătrăţelul din colţul dreapta jos, în sens trigonometric, cu numerele naturale nenule distincte, în ordinea naturală (1, 2, 3, …).

a) Ce număr se va afla în centrul pătratului P_3 ?

b) Câte numere naturale se vor utiliza pentru completarea celor 2012 pătrate iniţiale ?

c) Care este poziţia pe care se va afla numărul 2012 ?

Soluţie:

a) În orice pătrat se află 5 numere distincte 1p

În centrul pătratului P_3 se va afla numărul 15 .... 1p

b) Fiecare pătrat conţinând 5 numere naturale distincte vom folosi 2012 × 5 = 10060 numere 2p

c) Cu primele 2010 numere natural distincte completăm 402 pătrate 2p

Numărul 2012 se va găsi în P_{403} în coltul dreapta sus 1p

3. a) În paralelogramul ABCD cunoaştem că $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

Demonstraţi că paralelogramul este un dreptunghi.

b) Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c} \ge 6$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului iar p este semiperimetrul triunghiului.

Soluţie:

a) Obţine $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$, $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$ 2p

Din relaţia $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right|$ deducem că ABCD este dreptunghi (având diagonalele congruente) 2p

b) Notăm x = p - a, y = p - b , z = p - c şi obţinem a = y + z, b = x + z şi c = x + y 1p

Aduce inegalitatea la forma $\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x}\geq 6$ 1p

Finalizare 1p

4. O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăţi având ariile S_1, S_2, S_3, S_4 (vezi figura alăturată).

a) Demonstraţi că $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

b) Cunoscând că $S_2 = 300cm^2$, $S_3 = 180cm^2$, $S_4 = 120cm^2$, determinaţi suprafaţa iniţială a tablei.

S_1	S_2
S_4	S_3

<u>Soluţie:</u>

a) Notăm $S_1 = a\cdot x, S_2 = a\cdot y, S_3 = y\cdot b, S_4 = b\cdot x$ 2p

Verificare $S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4$ 2p

b) Obţine $S_1 = 200\ cm^2$ 2p

Finalizare: Suprafaţa iniţială va fi de $800\ cm^2$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.