CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5^x + \lg x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Comparaţi numerele $a=\sqrt{5}-\lg 2$ şi $b=\sqrt[3]{5}-\lg 3$.

Soluţie:

a) Funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = 5^x$ este strict crescătoare 1p

Funcţia $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x) = \lg x$ este strict crescătoare 1p

Funcţia $f = g + h$ este strict crescătoare 2p

b) Avem : $a = 5^{\frac{1}{2}} + \lg\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ şi $b = 5^{\frac{1}{3}} + \lg\frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ 2p

Deoarece $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, cum funcţia f este strict crescătoare, deducem că $a > b$ 1p

2. Ştefan vrea să citească o carte care are 381 de pagini. El îşi propune să citească în prima zi un număr întreg de pagini, apoi în fiecare zi, să citească un număr de pagini egal cu dublul numărului de pagini citite în ziua precedentă. Câte pagini a citit în prima zi şi în câte zile a terminat de citit cartea, ştiind că a citit cel puţin două zile ?

Soluţie:

Fie a numărul de pagini citite în prima zi, iar n numărul de zile în care va fi citită cartea 1p

Numărul de pagini citite în cele n zile va fi $a + 2a + 2^2a + ... + 2^{n-1}a$ 2p

Avem relaţia $a + 2a + 2^2a + ... +2^{n-1}a = a\cdot(2^n-1)$, deci $a\cdot(2^n-1) = 381$ 1p

Deducem că $a\in\{1, 3, 127, 381\}$ 1p

Găsim soluţiile: $a = 3$ şi $n = 7$, respectiv $a = 127$ şi $n = 2$ 2p

3. Se consideră numărul $a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, unde z este un număr complex de modul 1.

a) Să se demonstreze că $a=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$.

b) Determinaţi valoarea maximă a numărului a .

c) Determinaţi numărul complex z, pentru care a=4.

Soluţie:

a) Avem: $\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{z\cdot\overline{z}}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 2p

$a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\overline{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$ 1p

b) Deoarece $\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\le|z|+\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1+1=2,$ deducem $a\le4$ 1p

c) Dacă z = x + iy, avem: $\left|x+\frac{1}{2}+i\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2=4$, cu $x^2+y^2=1$ 1p

Găsim $x+y\sqrt{3}=2$ 1p

Obţinem soluţia $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1p

4. Fie sumele următoare: $S_1=C_{100}^0+2C_{100}^2+2^2C_{100}^4+...2^{50}C_{100}^{100}$ şi

$S_2=C_{100}^1+2C_{100}^3+2^2C_{100}^5+...2^{49}C_{100}^{99}$

a) Demonstraţi că $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$.

b) Să se demonstreze că $0<S_1-\sqrt{2}S_2<\frac{1}{2^{100}}$.

c) Calculaţi $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

Soluţie:

a) Se dezvoltă cu Binomul lui Newton 1p

Deducem $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$ 1p

b) Avem $\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=S_1-\sqrt{2}S_2$ 1p

$S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}>0$ 1p

$S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}}<\frac{1}{2^{100}}$ 1p

c) Deoarece $2^{10}=1024>10^3$, avem $S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}}<\frac{1}{2^{100}}<\frac{1}{10^{30}}$ 1p

Atunci $0<10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)<1,$ deci $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]=0$ 1p

<u>**Notă:**</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.