CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XI a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}7 & 10\\ -5 & -8\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice egalitatea $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$.

b) Să se determine matricea B^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se determine matricea C^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie:

a) Calculează $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ 1p

Verificarea egalităţii $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$ 1p

b) Obţine corect B^2, B^3 .... 1p

Enunţat ipoteza inductivă $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$, $n \geq 1$ 1p

Finalizat demonstraţia prin metoda inducţiei 1p

c) Obţine corect $C^2 = A \cdot B^2 \cdot A^{-1}$ 1p

Demonstrarea completă a relaţiei $C^n = A \cdot B^n \cdot A^{-1}$ 1p

2. O unitate economică ce produce frigidere are costuri fixe anuale de 10000€ la care se adaugă câte 200 € pentru fiecare frigider produs. Preţul cu care fabricantul vinde un frigider este de 350€. Notăm cu f(n) suma, în euro, cheltuită pentru producerea a n frigidere şi cu g(n) suma, în euro, ce revine ca beneficiu fabricantului după ce vinde n frigidere.

a) Calculaţi f(100), f(200) şi determinaţi formula pentru f(n).

b) Demonstraţi că $g(60) < 0$, iar $g(70) > 0$ şi interpretaţi rezultatele, din punct de vedere al rentabilităţii activităţii.

c) Dacă fabricantul şi-a propus să realizeze un profit anual de cel puţin 30000€, ce număr de frigidere ar trebui să producă şi să comercializeze ?

Soluţie:

a) $f(100)=10000+100\cdot 200=30000$€ ; $f(200)=10000+200\cdot 200=50000$€ 1p

Obţine $f(n)=10000+n\cdot 200$ 2p

b) $g(60) = 60 \cdot 350 – f(60) = 21000 – 22000 = -1000 < 0$

$g(70) = 70 \cdot 350 – f(70) = 24500 – 24000 = 500 > 0$ 1p

Interpretare: *La o producţie de 60 de frigidere fabricantul merge în pierdere, pe când la o producţie de 70 frigidere începe să fie rentabilă activitatea.* 1p

c) Este necesar ca $g(n) \geq 30000$ 1p

Finalizare $n > 266$. Aşadar producând (şi vânzând) cel puţin 267 frigidere, poate obţine profitul dorit 1p

3. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor de ordinul al treilea care au toate elementele numere naturale, pe diagonala secundară au mereu numărul 1, iar suma elementelor de pe oricare linie sau coloană este 2012.

a) Daţi exemplu de o matrice din mulţimea $\mathcal{M}$.
b) Care este numărul elementelor mulţimii $\mathcal{M}$? Justificaţi răspunsul.
c) Stabiliţi dacă există matrice inversabile în mulţimea $\mathcal{M}$, care să aibă inversa tot în mulţimea $\mathcal{M}$.

<u>Soluţie:</u>

a) De exemplu $A=\begin{pmatrix}2011 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2011\\ 1 & 2011 & 0\end{pmatrix}$, sau orice alt exemplu corect 2p

b)Forma generală a matricelor este $B=\begin{pmatrix}x & 2011-x & 1\\ 2011-x & 1 & x\\ 1 & x & 2011-x\end{pmatrix}$, unde $x\in\{0,1,...,2011\}$ 2p

Numărul elementelor mulţimii este 2012 (corespunzător fiecărui x) 1p

<u>NOTĂ!:</u> Precizarea răspunsului, fără nici o argumentare 1p

c) Dacă ar exista o matrice A în mulţimea $\mathcal{M}$ astfel încât A^{-1} să fie tot în $\mathcal{M}$, am avea:
$A\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I_3$. De aici şi $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$ $(*)$ 1p
Însă $\det(A)$ şi $\det(A^{-1})$ sunt numere întregi pare astfel că relaţia $(*)$ este imposibilă, iar răspunsul este negativ 1p

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\cdot e^{-x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(-f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$

b) Determinaţi numărul tangentelor la graficul funcţiei care trec prin originea sistemului de axe.

c) Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f^{(n)}(0)<3$.

<u>Soluţie:</u>

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(-f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}\cdot e^{-1}=e^{-2}$ 2p

b) Scrie ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisa x_0, t: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 1p
Pentru ca originea să aparţină tangentei e necesar ca $f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0$ 1p
Deduce că x_0 verifică relaţia $x_0^2-x_0-1=0$, deci două tangente verifică cerinţa 1p

c) Obţine $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)$ 1p
Relaţia $f^{(n)}(0)<3$ conduce la soluţia n poate fi orice număr par sau 1 .... 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.