CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XII-a

1. Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d > 0$ una faţă de cealaltă. În această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie:

$$f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Considerând legea de compoziţie definită pe mulţimea $G = (0, \infty)$, se cere:
a) Demonstraţi că legea este asociativă .
b) Cercetaţi dacă legea admite element neutru .
c) Calculaţi $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d)$.

Soluţie:

a) Obţine $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3}{f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2}$ 1p

Obţine $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3}{f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2}$ 1p

b) Axioma corectă 1p

Din relaţia $f \circ e = f \Rightarrow \frac{f \cdot e}{f + e - d} = f \Leftrightarrow f^2 - df = 0$, deci nu există element neutru 1p

c) Obţine $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d) = d$ 3p

2. Se consideră $I(a) = \int_1^3 \frac{1}{|x-a|+1} dx$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $I(1)$;
b) Să se demonstreze că $I(2) = 2\ln 2$;
c) Calculaţi $\lim_{a\to\infty} I(a)$.

Soluţie:

a) Obţine $I(1) = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3$ 1p

b) Obţine $I(2) = \int_1^2 \frac{1}{3-x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x-3|\Big|_1^2 + \ln|x-1|\Big|_2^3 = 2\ln 2$ 2p

a) Daca $a \to \infty$ atunci $a > 3$, iar pentru $x \in [1,3]$ vom avea $x < a$ 1p

Atunci $I(a) = \int_1^3 \frac{1}{a-x+1} dx = -\ln|x-a-1|\Big|_1^3 = \ln\left(\frac{a}{a-2}\right)$ 2p

$\lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{a}{a-2}\right) = \ln 1 = 0$ 1p

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ având elementele din inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi mulţimea

$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Determinaţi n - minim cu proprietatea $A^n = I_3$.
b) Determinaţi forma matricelor din mulţimea C(A).
c) Câte matrice din C(A) au determinantul egal cu $\hat{0}$?

<u>Soluţie:</u>

a) Obţine $A^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -\hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ 1p

Pentru n = 6 vom avea $A^n = I_3$ 1p

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ află $A \cdot X$ şi $X \cdot A$ 1p

Obţine X de forma $X = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & e & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & i \end{pmatrix}$ 2p

c) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & e & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & i \end{pmatrix}$ atunci $\det(X) = a \cdot e \cdot i$

Pentru $a = \hat{0}$ vom avea 49 posibilităţi de alegere a matricei 1p

Pentru $e = \hat{0}$ vom avea 42 posibilităţi de alegere a matricei (fară $a = \hat{0}$)

Pentru $i = \hat{0}$ vom avea 36 posibilităţi de alegere a matricei (fară $a = e = \hat{0}$)

Finalizare: 127 matrice vor avea determinantul egal cu $\hat{0}$ 1p

4. Se consideră funcţia $f:(0,3) \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-3}{3}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3-x}{x}}\right)$

a) Să se determine f'(x).

b) Să se determine acea primitivă F a funcţiei f pentru care $F(1) = \frac{3\pi}{2}$.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

<u>Soluţie:</u>

a) $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{3-x}{x}}\cdot\left(\frac{-3}{2x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{3-x}}=0$ 3p

b) Din punctul a) rezultă că f(x) este constantă pentru orice $x\in(0,3)$ 1p

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\arcsin(-1)+2\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$,deduce ca $f(x)=\frac{\pi}{2}$. 2p

O primitivă va fi $F(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x+k$,iar primitiva căutată va fi $F(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x+\pi$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.