

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

Clasa a IX-a

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - a$, $a \in (0, \infty)$.
- 1) Demonstrați că soluțiile ecuației $\left|f(x) - 2a\right| = 2a$, $a \in (0, \infty)$ sunt în progresie aritmetică.
 - 2) Demonstrați că dacă există u și v diferite astfel încât $|f(u) - f(v)| \leq 2$, atunci $|u - v| \leq 1$.
 - 3) Demonstrați că dacă M este o mulțime cu 3 elemente astfel încât $M \subset [2010, 2012]$ atunci există cel puțin două elemente x și y aparținând mulțimii M astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq 2$
2. Avem la dispoziție 2012 pătrate 3×3 , împărțite fiecare în câte 9 „pătrățele” 1×1 prin drepte paralele cu laturile pătratului inițial și notate $P_1, P_2, \dots, P_{2012}$. În fiecare dintre pătrățele inițiale se completează pătrățelele din colțuri și apoi cel din centru, începând cu pătrățelul din colțul dreapta jos, în sens trigonometric, cu numerele naturale nenule distincte, în ordinea naturală (1, 2, 3, ...).
- a) Ce număr se va afla în centrul pătratului P_3 ?
 - b) Câte numere naturale se vor utiliza pentru completarea celor 2012 pătrate inițiale ?
 - c) Care este poziția pe care se va afla numărul 2012 ?
3. a) În paralelogramul ABCD cunoaștem că $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$.
Demonstrați că paralelogramul este un dreptunghi.
- b) Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq 6$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului iar p este semiperimetrul triunghiului.
4. O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăți având ariile S_1, S_2, S_3, S_4 (vezi figura alăturată).
- | | |
|-------|-------|
| S_1 | S_2 |
| S_4 | S_3 |
- a) Demonstrați că $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
 - b) Cunoscând că $S_2 = 300\text{cm}^2$, $S_3 = 180\text{cm}^2$, $S_4 = 120\text{cm}^2$, determinați suprafața inițială a tablei.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.