CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x+\lg x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Comparaţi numerele $a=\sqrt{5}-\lg 2$ şi $b=\sqrt[3]{5}-\lg 3$.

2. Ştefan vrea să citească o carte care are 381 de pagini. El îşi propune să citească în prima zi un număr întreg de pagini, apoi în fiecare zi, să citească un număr de pagini egal cu dublul numărului de pagini citite în ziua precedentă. Câte pagini a citit în prima zi şi în câte zile a terminat de citit cartea, ştiind că a citit cel puţin două zile ?

3. Se consideră numărul $a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, unde z este un număr complex de modul 1.

a) Să se demonstreze că $a=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$.

b) Determinaţi valoarea maximă a numărului a .

c) Determinaţi numărul complex z, pentru care a=4.

4. Fie sumele următoare: $S_1=C_{100}^0+2C_{100}^2+2^2C_{100}^4+...2^{50}C_{100}^{100}$ şi

$S_2=C_{100}^1+2C_{100}^3+2^2C_{100}^5+...2^{49}C_{100}^{99}$

a) Demonstraţi că $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$.

b) Să se demonstreze că $0<S_1-\sqrt{2}S_2<\frac{1}{2^{100}}$.

c) Calculaţi $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*