

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2012**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**Clasa a XII-a**

1. Două lentile având distanțele focale  $f_1$ , respectiv  $f_2$  sunt situate la distanța  $d > 0$  una față de cealaltă. În această situație distanța focală  $f$  a sistemului este dată de legea de compoziție:

$$f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Considerând legea de compoziție definită pe mulțimea  $G = (0, \infty)$ , se cere:

- a) Demonstrați că legea este asociativă .
  - b) Cercetați dacă legea admite element neutru .
  - c) Calculați  $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d)$  .
2. Se consideră  $I(a) = \int_1^3 \frac{1}{|x-a|+1} dx$ , unde  $a \in \mathbb{R}$  .
- a) Să se calculeze  $I(1)$  ;
  - b) Să se demonstreze că  $I(2) = 2\ln 2$  ;
  - c) Calculați  $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$  .

3. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$  având elementele din inelul  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  și mulțimea

$$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$$

- a) Determinați  $n$  - minim cu proprietatea  $A^n = I_3$  .
- b) Determinați forma matricelor din mulțimea  $C(A)$ .
- c) Câte matrice din  $C(A)$  au determinantul egal cu  $\hat{0}$  ?

4. Se consideră funcția  $f : (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-3}{3}\right) + 2\arctg\left(\sqrt{\frac{3-x}{x}}\right)$

- a) Să se determine  $f(x)$ .
- b) Să se determine acea primitivă  $F$  a funcției  $f$  pentru care  $F(1) = \frac{3\pi}{2}$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.