CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a IX-a

1. Într-un acvariu sunt 200 de peşti. 1% dintre ei sunt albaştri, toţi ceilalţi fiind galbeni. Câţi peşti galbeni trebuie luaţi din acvariu, astfel încât peştii albaştri să reprezinte 2% din toţi peştii rămaşi în acvariu?

Soluţie:

Calculează numărul de peşti albaştri: $1\% \cdot 200 = 2$ peşti 2p
Calculează numărul de peşti galbeni: $200 - 2 = 198$ peşti 1p
Dacă sunt luaţi din acvariu x peşti galbeni, rămân $200 - x$ peşti (în total) 1p
$2 = \frac{2}{100} \cdot (200 - x)$ 1p
Determină $x = 100$ peşti galbeni ce trebuie luaţi din acvariu 2p

2. O sferă care alunecă pe un plan înclinat parcurge în prima secundă 0,4 m şi în fiecare din secundele următoare cu 0,5 m mai mult decât în secunda precedentă. Ce distanţă a parcurs sfera după 25 de secunde?

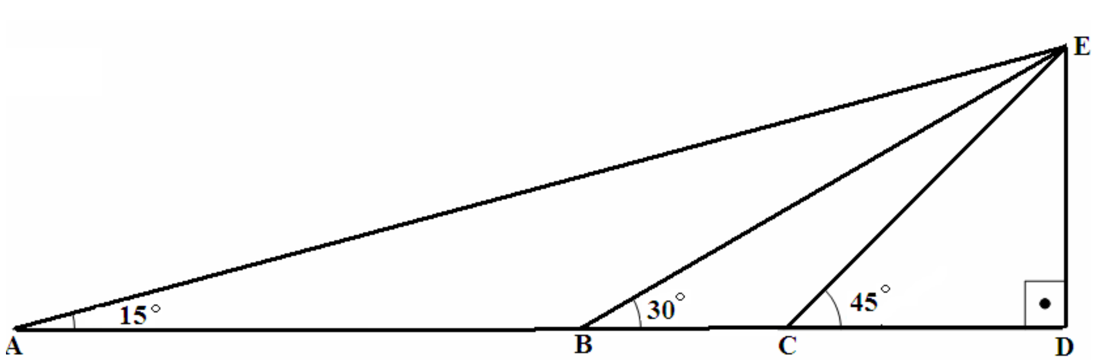
Soluţie:

Distanţa parcursă după prima secundă $d_1 = 0{,}4$m
Distanţa parcursă după a doua secundă $d_2 = 0{,}4 + 0{,}5$ 1p
Distanţa parcursă după a treia secundă $d_3 = 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}5$ şi aşa mai departe 1p
Observă că distanţele parcurse se află în progresie aritmetica cu primul termen de 0,4m şi raţia de 0,5m 2p
Scrie suma distantelor $S_{25} = d_1 + d_2 + ... + d_{25}$ 1p
Calculează $S_{25} = 160$ m 2p

3. Un topograf observă că dintr-un punct A o clădire se vede sub unghiul de 15°. Apropiindu-se cu 20 m din punctul B, unghiul de observare este de 30°, iar după încă $\left(10\sqrt{3} - 10\right)$ m din punctul C unghiul devine 45°. Determinaţi:

a) Înălţimea clădirii
b) Distanţa de la punctul A la punctul cel mai înalt al clădirii.

Soluţie:



a) Figura 1p
Dacă DE este înălţimea clădirii, în Δ BDE : m $(\sphericalangle D) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=30^\circ \Rightarrow BE = 2DE$ 1p
În Δ ADE: $m(\sphericalangle B)=30^\circ$, $m(\sphericalangle D)=90^\circ$, m $(\sphericalangle E)=75^\circ$, $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle AED) - m(\sphericalangle BED) = 75^\circ - 60^\circ =$
$= 15^\circ \Rightarrow \Delta$ ABE isoscel 2p
Δ ABE isoscel $\Rightarrow AB = BE \Rightarrow BE = 20m$, $BE = 2DE$, $BE = 20m \Rightarrow DE=10m$ 1p
b) În Δ ABE se aplică teorema cosinusului pentru latura AE:
$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB\cdot BE\cdot \cos(\sphericalangle B)$ 1p
$AE^2 = 800 + 400\sqrt{3} \Rightarrow AE = 200\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 1p

4. În sistemul de coordonate (xOy) se consideră punctele $A(2x - 1, 0)$, $B(x, 0)$, $C(0, x)$, $x\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 + BC^2 + \frac{m}{4}\right]$, $m \in \mathbb{R}$

Să se determine funcţia f, ştiind că graficul funcţiei este tangent la axa Ox.

<u>Soluţie:</u>
$AB^2 = x^2 - 2x + 1$ 1p
$AC^2 = 5x^2 - 4x + 1$ 1p
$BC^2 = 2x^2$ 1p
$f(x) = 4x^2 - 3x + 1 + \frac{m}{8}$ 1p
Din faptul ca graficul este tangent la axa Ox $\Rightarrow \Delta = 0$ 1p
$\Delta = 9 - 16\left(1+\frac{m}{8}\right) \Rightarrow 9 - 16\left(1+\frac{m}{8}\right) = 0 \Rightarrow m = -\frac{7}{2}$ 1p
$f(x) = 4x^2 - 3x + \frac{9}{16}$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.