CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a XII-a

1. Un lot de jucători al unei echipe de fotbal are 2 portari, 8 jucători pentru apărare şi 9 jucători de atac. În câte moduri se poate forma echipa de start cu 11 jucători selectaţi din lotul existent, dacă aceasta trebuie să fie compusă din: 1 portar, 4 jucători de apărare şi 5 jucători de atac?

Soluţie:

Numărul de moduri în care pot fi aleşi portarii $C_2^1 = 2$.. 1p

Numărul de moduri în care pot fi aleşi jucătorii pentru apărare $C_8^4 = 35$ 2p

Numărul de moduri în care pot fi aleşi jucătorii în atac $C_9^5 = 126$ 2p

Numărul de moduri în care poate fi formată echipa $C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_9^5$ 1p

Calcul final şi răspuns la cerinţă $C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_9^5 = 8820$ 1p

2. Americanul John a moştenit 25000 de dolari. O parte din aceşti bani i-a depus într-o bancă, o parte i-a investit în obligaţiuni municipale şi o parte intr-un fond mutual. După un an el a primit o dobândă totală de 1620 de dolari. Ştiind că banca i-a plătit o dobânda de 6% anual, obligaţiunile o dobândă de 7% anual, fondul mutual 8% anual şi că John a investit mai mult cu 6000 de dolari în obligaţiuni municipale decât în fondul mutual, precizaţi ce sume a investit John in fiecare categorie.

Soluţie:

Notează cu: x - suma depusă la banca, y - suma investită în obligaţiuni municipale, z - suma investita in fondul mutual 1p

Scrie sistemul: $\begin{cases} x+y+z=25000 \\ 0,06x+0,07y+0,08z=1620 \\ y-z=6000 \end{cases}$ 3p

Rezolvă sistemul prin orice metodă cunoscută şi obţine: $\begin{cases} x=15000 \\ y=8000 \\ z=2000 \end{cases}$ 2p

Răspunde problemei, John
- a depus la banca 15.000 de dolari
- a investit în obligaţiuni municipale 8000 de dolari
- a investit in fondul mutual 2000 de dolari 1p

3. Se considera matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze A^4.

b) Dacă matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ şi $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Să se demonstreze că: dacă oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 4k$.

<u>Soluţie:</u>

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot I_2$ 1p

b) Dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, din $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B \Rightarrow a = d$ şi $b = 0$ 1p

din $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B \Rightarrow a = d$ şi $c = 0$, adică $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 1p

c) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $n = 4k$, atunci $A^n = (-4)^k \cdot I_2$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

dacă $n = 4k + 1$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A = (-4)^k \cdot A$; obţine $A \cdot X = X \cdot A$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă 1p

dacă $n = 4k + 2$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A^2 = (-4)^k \cdot A^2$; obţine $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă:

dacă $n = 4k + 3$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A^3 = (-4)^k \cdot A^3$; obţine $A^3 \cdot X = X \cdot A^3$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă 1p

Singurul caz când se verifică relaţia $A \cdot X = X \cdot A$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ 1p

4. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.

a) Să se demonstreze că legea “$*$” este asociativă.

b) Să se determine elemente simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea “$*$” .

c) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = -1$.

<u>Soluţie:</u>

a) Calculează $(x * y) * z$ şi $x * (y * z)$ 1p

Demonstrează că $(x * y) * z = x * (y * z)$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 1p

b) Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este elementul neutru al legii, din $x * e = e * x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$, obţine $e = -1$ 1p

Dacă x' este simetricul elementului $x \in \mathbb{Z}$, atunci $x' = \dfrac{-6x - 7}{5x + 6} \in \mathbb{Z}$ 1p

Găseşte $5x + 6$ este un divizor întreg al lui 1 (sau -1), atunci $x = -1$ este singurul element simetrizabil, cu $x' = -1$ 1p

c) Avem $x * x' = -1$ şi $\underbrace{x * x * ... * x}_{2012 \text{ factori}} \overset{\text{cf.a)}}{=} x * (\underbrace{x * x * ... * x}_{2011 \text{ factori}}) = -1$, de unde $\underbrace{x * x * ... * x}_{2011 \text{ factori}} = x' = -1$ 1p

După 2010 paşi se obţine $x * x = -1$, de unde $x = -1$ soluţie unică 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.