INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA NAȚIONALĂ
## 12 aprilie 2013

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A X-A

**1.** a) Să se verifice egalitatea $\dfrac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \dfrac{n}{\log_x A} + \dfrac{m}{\log_y A}$, unde A>1, $x, y > 1$ iar $m, n \in \mathbb{R}^*$.

b) Dacă $a = \log_{18} N$ şi $b = \log_{12} N$, să se exprime $\log_2 N$ şi $\log_3 N$ în funcție de a şi b.

**<u>Soluție:</u>**

a) Aduce la baza A scriind :

$\dfrac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \log_A x^n + \log_A y^m = n \log_A x + m \log_A y = \dfrac{n}{\log_x A} + \dfrac{m}{\log_y A}$ ........................................ 3p

b) Folosind relația anterioară putem scrie:

$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\log_{2\cdot 3^2} N} = \dfrac{1}{\log_2 N} + \dfrac{2}{\log_3 N}$ , iar $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{\log_{2^2 \cdot 3} N} = \dfrac{2}{\log_2 N} + \dfrac{1}{\log_3 N}$

Prin adunare $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 3\left(\dfrac{1}{\log_2 N} + \dfrac{1}{\log_3 N}\right)$, iar $\log_3 N = \dfrac{3ab}{2b - a}, \log_2 N = \dfrac{3ab}{2a - b}$ ............................ 4p

**2.** Pentru un triunghi ABC se cunosc: coordonatele unui vârf A(9, -9), ale centrului de greutate G(2, 0) şi ale mijlocului unei laturi N(-3, -3).

a) Demonstrați că punctele A, G, N nu sunt coliniare.

b) Determinați coordonatele vârfului triunghiului coliniar cu A şi N .

c) Determinați ecuația laturii BC.

**<u>Soluție:</u>**

a) Obține $m_{AG} = -\dfrac{9}{7}$, $m_{GN} = \dfrac{3}{5}$, deci punctele A, G, N nu sunt coliniare ..................................... 3p

b) Fie B vârful triunghiului coliniar cu A şi N. Atunci N este mijlocul segmentului AB, ceea ce conduce la $-3 = \dfrac{9 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -15$ iar $-3 = \dfrac{-9 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 3$. Obține B(-15, 3) ...................... 2p

c) Fie C cel de-al treilea vârf al triunghiului. Folosind coordonatele centrului de greutate, obținem $2 = \dfrac{-15 + 9 + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 12$ iar $0 = \dfrac{-9 + 3 + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 6$ ........................................................... 1p

Obține ecuația (BC): x – 9y + 42 = 0 ........................................................................... 1p

**3.** Pentru a înveseli atmosfera cei patru colegi de birou au hotărât să organizeze o tombolă cu ocazia Crăciunului. Astfel fiecare a adus câte un cadou, cadourile au fost numerotate cu numere de la 1 la 4, iar prin extragerea unuia dintre cele patru bilețele pe care erau scrise numerele de la 1 la 4 să își aleagă cadoul numerotat cu respectivul număr.

a) În câte moduri se pot numerota cele patru cadouri ?

b) În câte dintre situațiile posibile nici o persoană nu primește cadoul cumpărat de ea ?

**Soluție:**

Fiind patru cadouri vom avea 4! = 24 moduri de a le numerota, deoarece ordinea contează .......... 3p

Pentru a fixa lucrurile considerăm A, B, C respectiv D cele patru persoane şi admitem că A a adus cadoul numerotat cu 1, B a adus cadoul numerotat cu 2, C a adus cadoul numerotat cu 3, iar D a adus cadoul numerotat cu 4. Numărăm câte permutări fără puncte fixe putem construi (A≠1, B≠2, C≠3, D≠4) .......................................................................................................................... 1p

Permutările $(2,3,4,1),(2,1,4,3),(2,4,1,3)$ au pe primul loc pe 2 și verifică cerința ...................... 2p

Vor fi tot câte trei permutări cu 3 şi respectiv 4 pe primul loc, deci un număr de 9 permutări verifică cerința .......................................................................................................................... 1p

**4.** Se consideră funcția $f_n : C \to C,\ \ f_n(x) = (1+x)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați $f_6(i) + f_6(-i)$.

b) Demonstrați că dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$, atunci $z \in i \cdot \mathbb{R}$.

c) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că $\left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right)^2 + \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)^2 = 1024$,

calculând eventual $f_n(i) \cdot f_n(-i)$.

**Soluție:**

Obține $f_6(i) = -8i$ .......................................................................................................................... 2p

$f_6(-i) = 8i$, iar suma $f_6(i) + f_6(-i) = 0$ .......................................................................................... 1p

Fie $z = a + bi,\quad a, b \in \mathbb{R}$. Din relația $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$ deduce $|1+z| = |1-z|$ .......................... 1p

Finalizare : $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} = \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \Leftrightarrow a = 0, z = ib \in i\mathbb{R}$ .................................................... 1p

Obține $f_n(i) = (1+i)^n = \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right) + i \cdot \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)$ .................................. 1p

Obține $f_n(i) \cdot f_n(-i) = 2^n = \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right)^2 + \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)^2 = 1024$,

de unde n = 10 .......................................................................................................................... 1p