INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013
Filiera tehnologică : profil tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Spunem că matricea $A\in M_3(\mathbb{R})$ se numeşte *perturbată* dacă are exact patru elemente egale cu 0 care formează un minor de ordinul al doilea construit cu liniile 1 şi 2 ale matricei, iar celelalte elemente sunt diferite între ele.

a) Dați exemplu de o matrice *perturbată*.

b) Să se demonstreze că orice matrice *perturbată* nu este inversabilă.

c) Câte matrice perturbate având restul elementelor cifre se pot construi ?

Soluție:

Un exemplu este matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\5&4&3\end{pmatrix}$ 1p

O matrice perturbată poate fi numai una dintre următoarele :

$\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&b\\e&d&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&x&0\\0&y&0\\t&z&u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m&0&0\\n&0&0\\p&q&r\end{pmatrix}$, unde variabilele sunt numere reale 3p

Se verifică, în fiecare caz, că determinantul este nul, deci matricea nu este inversabilă 1p

Notă: Verificarea cerinței pentru un singur tip de matrice se va puncta cu 2 puncte

Elementele nenule pot fi alese în $A_9^5=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=15120$ moduri 1p

Se obține că un număr de $3\cdot A_9^5=45360$ matrice verifică cerința 1p

2. Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ definim matricea $D(A,B)=A\cdot B-B\cdot A$

a) Verificați $D(A,A)=D(A,I_2)$

b) Demonstrați că există $x, y, z\in\mathbb{R}$ astfel încât $D(A,B)=\begin{pmatrix}x&y\\z&-x\end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că $D^2(A,B)$ este de forma $\alpha\cdot I_2$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Soluție:

Obține $D(A,A)=O_2$ şi $D(A,I_2)=O_2$ 2p

Alegând $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}m&n\\p&q\end{pmatrix}$

obținem $AB=\begin{pmatrix}am+bp&an+bq\\cm+dp&cn+dq\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}am+cn&mb+dn\\pa+cq&pb+dq\end{pmatrix}$ 1p

Pentru $x=bp-cn$, $y=n(a-d)+b(q-m)$ şi $z=c(m-q)+p(d-a)$ rezultă cerința 2p

Pentru D(A,B) găsit anterior identifică $\alpha=x^2+y\cdot z$ astfel că $D^2(A,B)=\alpha\cdot I_2$ 2p

3. Se consideră funcțiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ iar $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

a) Verificați relația $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Demonstrați că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Deduceți relația $\sin 1 > \frac{2}{\pi}$, utilizând eventual monotonia funcției f.

Soluție:

Obține $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde rezultă cerința 2p

Obține $g'(x) = -x \cdot \sin x$ 1p

Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deduce că $g'(x) < 0$, deci funcția g este strict descrescătoare 1p

Finalizare: Deoarece funcția g este strict descrescătoare pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Deoarece $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ iar $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $f'(x) < 0$, deci funcția f este strict descrescătoare pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Folosind monotonia funcției f rezultă că $f(1) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin 1 > \frac{2}{\pi}$ 1p

4. O companie aviatică are în dotare 20 de aeronave. După frecvența cu care se efectuează zborurile spre o destinație, compania are destinațiile împărțite astfel: destinații spre care zboară zilnic, destinații spre care zboară odată la două zile şi destinații spre care zboară odată la trei zile. Ştiind că luni au avut loc 20 de plecări, în primele trei zile au avut loc 46 de zboruri, iar numărul aeronavelor care execută curse zilnice este egal cu numărul aeronavelor care execută curse cu celelalte frecvențe la un loc, se cere:

a) Câte aeronave execută zboruri zilnic ?

b) Câte aeronave execută un zbor la trei zile ?

Soluție:

Notăm cu x numărul aeronavelor care zboară zilnic, cu y numărul aeronavelor care zboară odată la două zile şi cu z numărul aeronavelor care zboară odată la trei zile. Scrie relațiile :

$x + y + z = 20$ 2p

$x = y + z$ şi deduce că $x = 10$ 2p

$3x + 2y + z = 46$ 1p

Obține: $z = 4$ 2p