INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{a}\cdot X + \hat{b} \in \mathbb{Z}_5[X]$

a) Verificaţi relaţia $\hat{t}^4 = \hat{1}$, pentru orice $\hat{t} \in \mathbb{Z}_5, \hat{t} \neq \hat{0}$.

b) Câte polinoame de forma anterioară există ?

c) Demonstraţi că pentru $\hat{b} = \hat{1}$ polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$.

Soluţie:

a) Pentru $\hat{t} \in \{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$, se verifică prin calcul relaţia $\hat{t}^4 = \hat{1}$ 2p

b) Deoarece $\hat{a},\hat{b} \in \mathbb{Z}_5$, ele iau câte 5 valori, deci vor exista 25 de polinoame 2p

c) Exemplifică pentru fiecare situaţie că polinomul este reductibil, astfel :

Dacă $\hat{a} = \hat{0}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^2 + \hat{3})(X^2 + \hat{2})$

Dacă $\hat{a} = \hat{1}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{3})(X + \hat{2})$

Dacă $\hat{a} = \hat{2}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{1})(X + \hat{1})$

Dacă $\hat{a} = \hat{3}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + X^2 + X + \hat{4})(X + \hat{4})$

Dacă $\hat{a} = \hat{4}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{2})(X + \hat{3})$ 3p

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{e^{3^n \cdot x}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(x)dx$.

a) Verificaţi egalitatea $3f_{n+1}(x) = f_n(3x)$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Calculaţi I_1.

c) Demonstraţi că $I_{n+1} = \dfrac{1}{9}\cdot I_n$, utilizând relaţia de la punctul (a).

Soluţie:

a) Se obţine cu uşurinţă că $f_n(3x) = \dfrac{3x}{e^{3^n \cdot 3x}} = 3\cdot\dfrac{x}{e^{3^{n+1}\cdot x}} = 3\cdot f_{n+1}(x)$ 2p

b) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} f_1(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot e^{-3x}dx = x\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-3x}dx = x\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{e^{-3x}}{-9}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

.... 2p

c) $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_{n+1}(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_n(3x)dx$ 1p

Notând t = 3x, deducem $I_{n+1} = \dfrac{1}{9}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(t)dt = \frac{1}{9}\cdot I_n$ 2p

3. Se consideră inelul comutativ $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

a) Aflați suma elementelor nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$.

b) Elementele nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$ se organizează în următorul tablou pătratic $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \\ \hat{7} & \hat{8} & \hat{9} \end{pmatrix}$.

Din tablou se scot 3 elemente, câte unul de pe fiecare linie şi coloană. Determinați suma elementelor rămase în tablou .

<u>Soluție:</u>

a) S = $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \hat{9} = \hat{5}$ 2p

b) Gândind tabloul ca având forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{3}+a & \hat{3}+b & \hat{3}+c \\ \hat{6}+a & \hat{6}+b & \hat{6}+c \end{pmatrix}$ cu a = $\hat{1}$, b = $\hat{2}$, c = $\hat{3}$ suma elementelor

scoase după regula dată va fi $\hat{3} + \hat{6} + a + b + c = \hat{5}$ 3p

Suma elementelor rămase va fi egală cu $\hat{0}$ 2p

4. Un grup de prieteni, n fete şi 4 băieți, au ieşit la iarbă verde. Au disputat câte o partidă de badminton, fiecare cu fiecare, iar în urma confruntărilor fetele au câştigat de două ori în fața băieților. Ştiind că raportul dintre numărul total al victoriilor fetelor şi numărul total al victoriilor băieților este de $\frac{5}{16}$, se cere:

a) Câte partide au disputat băieții ?

b) Câte fete erau în grup ?

<u>Soluție:</u>

a) Băieții au disputat 4n partide cu fetele şi încă 6 partide între ei, în total 4n + 6 partide 2p

b) Fetele au câştigat $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ partide disputate între ele şi încă 2 .... 2p

Băieții au câştigat 6 + 4n – 2 partide 1p

Din relația $\dfrac{\frac{n(n-1)}{2} + 2}{4n+4} = \frac{5}{16}$, obținem n = 3 .... 2p