



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

**ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013**



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și ecuația $X^3 = A$, unde X este o matrice pătratică de ordinul 3, cu

elemente numere reale.

a) Demonstrați că $AX = XA$.

b) Demonstrați că există numerele reale a, b, c astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că ecuația $X^3 = A$ nu are soluții.

Soluție:

a) $X^4 = X^3 \cdot X = AX$ și $X^4 = X \cdot X^3 = XA$, deci $AX = XA$ 2p

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, din a) se obține: $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 2p

c) Conform a), b) $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, atunci $X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b & 3a^2c + 3ab^2 \\ 0 & a^3 & 3a^2b \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$ 1p

deci $a^3 = 0$, $3a^2b = 1$, $3a^2c + 3ab^2 = 0$ 1p

rezultă concluzia 1p

2. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, cu elemente numere întregi, simetrică ($a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1,3}$). Demonstrați că, dacă elementele de pe diagonala principală sunt egale, iar suma elementelor fiecărei linii este a , atunci $4a \cdot \det(A)$ este număr întreg pătrat perfect.

Soluție:

Alege $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & u \\ z & u & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$ 2p

Din enunț avem: $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + u = a \\ x + z + u = a \end{cases}$ 1p

Deducem: $y = z = u$ 1p

$$A = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ x+2y & x & y \\ x+2y & y & x \end{vmatrix} = (x+2y) \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & x & y \\ 1 & y & x \end{vmatrix} = (x+2y) \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 0 & x-y & 0 \\ 1 & 0 & x-y \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2y)(x-y)^2 \dots\dots\dots 2p$$

Dar $x + 2y = a \Rightarrow 4a \cdot \det(A) = 4a^2(x-y)^2 \dots\dots\dots 1p$

3. Fie legea de compoziție “o” definită prin: $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, unde x, y sunt numere întregi.

- a) Demonstrați că legea “o” este asociativă.
- b) Demonstrați că legea “o” este comutativă.
- c) Demonstrați că legea “o” admite element neutru și găsiți elementele inversabile.
- d) Pe tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 2013. Considerăm două numere dintre acestea. Le ștergem și în locul lor punem rezultatul compunerii lor prin legea “o”. Continuăm procedeul până rămâne un singur număr scris pe tablă. Care este acest număr?

Soluție:

- a) Verifică asociativitatea 2p
- b) Verifică comutativitatea 1p
- c) Determină elementul neutru: 4 1p
- Găsește elementele inversabile: 2 și 4 1p
- d) Arată că numărul rămas pe tablă este 3 2p

4. Un magazin alimentar vinde produsele A, B, C. La sfârșitul fiecărei zile se face bilanțul vânzărilor din acea zi. În prima zi se vând 18 bucăți din produsul A, 13 din produsul B și 11 din produsul C. A doua zi se vând 8 bucăți din produsul A, 11 din produsul B, 6 din produsul C. A treia zi se vând 19 bucăți din produsul A, 7 din produsul B și 2 din produsul C. Încasările din cele trei zile sunt: 705 u.m. în prima zi, 425 u.m. a doua zi și 355 u.m. a treia zi.

- a) Aflați valoarea fiecărui produs exprimată în unități monetare.
- b) Dacă în prima zi s-au înregistrat 4 pierderi din produsul B, a doua zi 7 pierderi din produsul C, iar a treia zi câte 4 pierderi din produsele A și B, care este procentul pierderilor din totalul vânzărilor în cele trei zile?

Soluție:

- a) Notăm: 1 unitate (bucată) din produsul A costă x u.m.
 1 unitate (bucată) din produsul B costă y u.m.
 1 unitate (bucată) din produsul C costă z u.m. 1p

Obține sistemul:

$$\begin{cases} 18x + 13y + 11z = 705 \\ 8x + 11y + 6z = 425 \\ 19x + 7y + 2z = 355 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Găsește: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \\ z = 30 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

- b) Pierderi: $4x + 8y + 7z = 370$ u.m. 1p

Procentul pierderilor este $\frac{37000}{1485} \% \approx 24,9\%$ 1p