



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera teoretică, profil umanist



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și ecuația $X^3 = A$, unde X este o matrice pătratică de ordinul 3, cu

elemente numere reale.

a) Demonstrați că $AX = XA$.

b) Demonstrați că există numerele reale a, b, c astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că ecuația $X^3 = A$ nu are soluții.

2. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, cu elemente numere întregi, simetrică ($a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1,3}$). Demonstrați că, dacă elementele de pe diagonala principală sunt egale, iar suma elementelor fiecărei linii este a , atunci $4a \cdot \det(A)$ este număr întreg pătrat perfect.

3. Fie legea de compoziție " \circ " definită prin: $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, unde x, y sunt numere întregi.

a) Demonstrați că legea " \circ " este asociativă.

b) Demonstrați că legea " \circ " este comutativă.

c) Demonstrați că legea " \circ " admite element neutru și găsiți elementele inversabile.

d) Pe tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 2013. Considerăm două numere dintre acestea. Le ștergem și în locul lor punem rezultatul compunerii lor prin legea " \circ ". Continuăm procedeul până rămâne un singur număr scris pe tablă. Care este acest număr?

4. Un magazin alimentar vinde produsele A, B, C. La sfârșitul fiecărei zile se face bilanțul vânzărilor din acea zi. În prima zi se vând 18 bucăți din produsul A, 13 din produsul B și 11 din produsul C. A doua zi se vând 8 bucăți din produsul A, 11 din produsul B, 6 din produsul C. A treia zi se vând 19 bucăți din produsul A, 7 din produsul B și 2 din produsul C. Încasările din cele trei zile sunt: 705 u.m. în prima zi, 425 u.m. a doua zi și 355 u.m. a treia zi.

a) Aflați valoarea fiecărui produs exprimată în unități monetare.

b) Dacă în prima zi s-au înregistrat 4 pierderi din produsul B, a doua zi 7 pierderi din produsul C, iar a treia zi câte 4 pierderi din produsele A și B, care este procentul pierderilor din totalul vânzărilor în cele trei zile?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.