INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Obține $n * n^3 = \log_n n^3 + \log_{n^3} n = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ 2p

   b) Obține $x * \frac{1}{y} = \log_x \frac{1}{y} + \log_{\frac{1}{y}} x = -\log_x y - \log_y x$ 1p

   Obține $\frac{1}{x} * y = \log_{\frac{1}{x}} y + \log_y \frac{1}{x} = -\log_x y - \log_y x$ și finalizare 1p

   c) Obține $a^x * b - a * b^x = \log_{a^x} b + \log_b a^x - \log_a b^x - \log_{b^x} a =$
   $= \left(x - \frac{1}{x}\right)(\log_b a - \log_a b)$ 1p

   Obține cazurile $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ sau $\log_a b = \log_b a$.. 1p

   Finalizare: $x \in \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$, pentru $a \neq b$ sau $x \in \mathbf{R}^*$, pentru $a = b$. 1p

2. a) Deoarece $f(n) - nf(n-1) = n$, rezultă că $f(n) \geq n$ 1p

   Obține $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 2p

   b) Verifică $(n+1) \cdot A_n^k = (n+1)\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!} = A_{n+1}^{k+1}$ 1p

   c) Etapa de verificare $P(1): f(1) = A_1^1$ – adevărată 1p

   Presupunem $P(n): f(n) = A_n^1 + A_n^2 + A_n^3 + \cdots + A_n^n$ – adevărată și demonstrăm că $P(n+1): f(n+1) = A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + A_{n+1}^3 + \cdots + A_{n+1}^{n+1}$ este adevărată.

   $$f(n+1) = (1+n)(1+f(n)) = (1+n)(1 + A_n^1 + A_n^2 + A_n^3 + \cdots + A_n^n) \overset{[b]}{=}$$
   $= A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + A_{n+1}^3 + \cdots + A_{n+1}^{n+1}$ 2p

3. a) Obține numărul punctelor de penalizare $2700 : 75 = 36$ 2p

   b) Notăm cu x – numărul conducătorilor auto fără puncte de penalizare primite,
   y – numărul conducătorilor auto cu 2 puncte de penalizare primite,
   z – numărul conducătorilor auto cu 5 puncte de penalizare primite.

   Scrie $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 2y + 5z = 36 \end{cases}$ 1p

   Din $x \geq 13$și $x + y + z = 25 \Longrightarrow y + z \leq 12$ 1p

   Din $36 = 2y + 5z \Longrightarrow 36 = 2(y+z) + 3z \leq 24 + 3z \Longrightarrow z \geq 4$, z – par 1p

   Pentru$z = 4 \Longrightarrow y = 8$și $x = 13$, iar pentru $z = 6 \Longrightarrow y = 3$ și $x = 16$ 1p

   $z \geq 8$nuconvine, decinumărul maxim al conducătorilor auto care auprimit 5 puncte de penalizareeste 6. .... 1p

4. Constatămcă$P_0 = 35000$, $P(2) = 42000$ și se cere $P(4)$ 2p

   Din $P(2) = 42000 = 35000 \cdot 2^{2k}$, obține$2^{2k} = 1{,}2$ 1p

   Folosindvalorileaproximative indicate deduce $2^{2k} = 1{,}2 = \sqrt[4]{2}$, deci$k = \frac{1}{8}$........ 2p

   Obțineestimarea$P(4) = P_0 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 35000 \cdot 1{,}4 = 49000$ euro 2p