INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XI-A

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1$ 1p

b) $\Delta\neq 0 \Longrightarrow$ sistem Cramer cu $x(a)=\frac{\Delta_x}{\Delta}; y(a)=\frac{\Delta_y}{\Delta}; z(a)=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ 1p

$\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2^a & 1 & 1\\ 4^a & 1 & 2\end{vmatrix}=1-2^a$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2^a & 1\\ 1 & 4^a & 2\end{vmatrix}=-4^a+3\cdot 2^a-1$,

$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2^a\\ 1 & 1 & 4^a\end{vmatrix}=4^a-2^a$,

$\big(x(a),y(a),z(a)\big)=(1-2^a,-4^a+3\cdot 2^a-1,4^a-2^a)$, $a\in\mathbf{R}$ 3p

c) $y(a)>1 \Leftrightarrow -4^a+3\cdot 2^a-2>0 \Leftrightarrow 4^a-3\cdot 2^a+2<0$

Notăm 2^a cu $t \Longrightarrow t^2-3t+2<0 \Longrightarrow t\in(1,2)$ 1p

$1<2^a<2 \Leftrightarrow 0<a<1 \Leftrightarrow a\in(0,1)$ 1p

2. a) $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$; $f'(x)=0 \Longrightarrow x=1$ 1p

f' continuă pe $(0,1)$ și pe $(1,+\infty) \Longrightarrow f'(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$ și

$f'(x)<0, \forall x\in(1,+\infty) \Longrightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$și

f strict descrescătoare pe $[1,+\infty)$ 3p

b) Din a) $\Longrightarrow f_{\max}=f(1)=1-\alpha \Longrightarrow f(x)\leq 1-\alpha, \forall x>0$

$\Leftrightarrow x^\alpha\leq \alpha x+1-\alpha, \forall x>0$ 1p

c) Prin transformări succesive avem:

$$a^\alpha b^\beta\leq \alpha a+\beta b \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\leq \alpha a+(1-\alpha)b \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\cdot b\leq b\left(\alpha\frac{a}{b}+1-\alpha\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\leq \alpha\frac{a}{b}+1-\alpha$, pentru $b>0$.

Ultimainegalitate se obține din b) pentru $x=\frac{a}{b}$ 2p

Sau: În inegalitatea de la b) punem $x=\frac{a}{b}$ și obținem inegalitatea cerută.

3. a) Considerăm funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^2-1 \Longrightarrow (d)$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\frac{1}{8} \Longrightarrow$ panta dreptei (d) este $f'\left(\frac{1}{8}\right)=\operatorname{tg}\alpha$, unde αeste unghiul pe care îl face dreapta cu (Ox)

$f'(x)=8x \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha=1 \Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ 2p

b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\frac{1}{8}$este

$y-f\left(\frac{1}{8}\right)=f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right)$........ 1p

$\Longrightarrow (d): y=x-\frac{17}{16}$ 1p

$d\cap(0x)=\left\{M\left(\frac{17}{16},0\right)\right\}$, $d\cap(0y)=\left\{N\left(0,-\frac{17}{16}\right)\right\}$ 1p

ΔMNOeste dreptunghic isoscel și are aria egală cu

$A_{\Delta MNO} = \frac{(\text{cateta })^2}{2} \Longrightarrow A_{\Delta MNO} = \frac{OM^2}{2} = \frac{\left(\frac{17}{16}\right)^2}{2} \Longrightarrow A_{\Delta MNO} = \frac{289}{512}$ 2p

4. $\det(M^2) = (detM)^2 = (a_3a_5 + a_1a_2a_4)^2$ 2p
   Andrei câștigăjocul, oricarear fi alegerilefăcute de Bogdan, dacădet(M^2) nudepinde de a_2șia_4 .... 1p
   $\Longrightarrow a_1 = 0 \Longrightarrow (a_3a_5)^2 = 1 \Longrightarrow a_3a_5 \in \{-1,1\}$ 2p
   $a_3, a_5 \in \mathbf{Z} \Longrightarrow (a_1, a_3, a_5) \in \{(0,1,1),\ (0,-1,-1),\ (0,1,-1),\ (0,-1,1)\}$ 2p